2001 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ (C_1,C_2 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为____________.

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 div(**grad**r) $\big|_{(1,-2,2)}$ =____________.

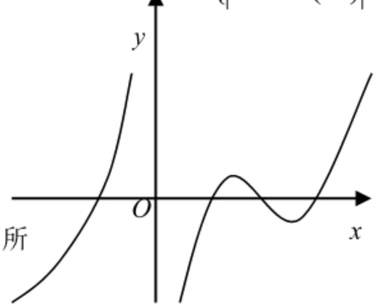
(3) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$____________.

(4) 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵,则 $(A-E)^{-1}$ =____________.

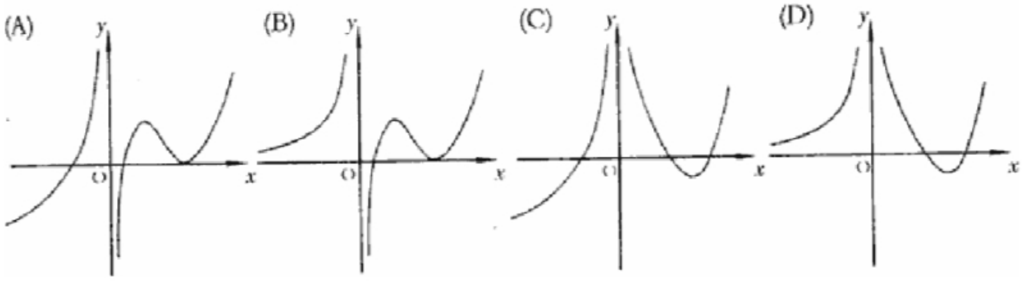
(5) 设随机变量 X 的方差是 2 ,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq$ ____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如右图所示,



则 $y=f'(x)$ 的图形为



(2) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f'_x(0,0)=3,\ f'_y(0,0)=1$,则

(A) $d_z|_{(0,0)}=3dx+dy$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为{3,1,1}.

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为{1,0,3}.

（D） 曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为{3,0,1}.

(3) 设$f(0)=0$,则$f(x)$在x=0 处可导的充要条件为

（A） $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$存在.　　（B） $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在.

（C） $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$存在.　　（D） $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在.

(4) 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则$A$与$B$

（A） 合同且相似.　　（B） 合同但不相似.

（C） 不合同但相似.　　（D） 不合同且不相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于

（A）-1.　　（B） 0.　　（C） $\frac{1}{2}$.　　（D） 1.

三、（本题满分 6 分）

求$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

四、（本题满分 6 分）

设函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微,且$f(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f(x,$

$f(x,x))$.求$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\big|_{x=1}$.

五、（本题满分 8 分）

设$f(x)$=$\begin{cases} \frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$将$f(x)$展开成$x$的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

六、（本题满分 7 分）

计算$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,其中$L$是平面$x+y+z=2$与

柱面$|x|+|y|=1$的交线,从Z轴正向看去,L为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设$f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数且$f''(x)\neq 0$,试证:

(1)对于$(-1,1)$内的任一$x\neq 0$,存在惟一的$\theta(x)\in(0,1)$,使$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$成立;

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为$h(t)$(t为时间)的雪堆在融化过程,其侧面满足方程

$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为 0.9),问高度为 130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

九、(本题满分 6 分)

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为线性方程组$Ax=0$的一个基础解系,$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$,

$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots$,

$\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$,其中$t_1,t_2$为实常数.试问$t_1,t_2$满足什么条件时,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$也为$Ax=0$的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵A与三维向量x,使得向量组x,Ax,A^2x线性无关,且满足

$A^3x=3Ax-2A^2x$.

(1)记P=(x,Ax,A^2x),求 3 阶矩阵B,使$A=PBP^{-1}$;

(2)计算行列式$|A+E|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数X服从参数为λ($\lambda>0$)的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为p($0<p<1$),且中途下车与否相互独立.以Y表示在中途下车的人数,求:

(1)在发车时有n个乘客的条件下,中途有m人下车的概率;

(2)二维随机变量(X,Y)的概率分布.

十二、（本题满分 7 分）

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$）,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$（$n\ge 2$）,其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

2001 年考研数学一试题答案与解析

一、填空题

(1)**【分析】** 由通解的形式可知特征方程的两个根是 $r_1,r_2=1\pm i$,从而得知特征方程为

$$(r-r_1)(r-r_2)=r^2-(r_1+r_2)r+r_1r_2=r^2-2r+2=0.$$

由此,所求微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

(2)**【分析】** 先求 **grad**r.

$$\textbf{grad}\mathrm{r}=\left\{\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right\}=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}.$$

再求

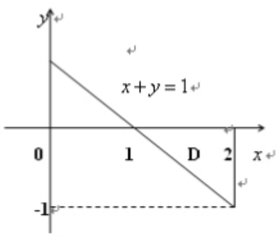
$$\mathrm{div}\textbf{grad}\mathrm{r}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r})$$

$$=(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})+(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})+(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

于是

$$\mathrm{div}\textbf{grad}\mathrm{r}\big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{r}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{3}.$$

(3)**【分析】** 这个二次积分不是二重积分的累次积分,因为 $-1\le y\le 0$ 时 $1-y\le 2$.由此看出二次积分 $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx$ 是二重积分的一个累次积分,它与原式只差一个符号.先把此累次积分表为



$$\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

由累次积分的内外层积分限可确定积分区域 D：

$$-1 \le y \le 0, 1-y \le x \le 2.$$

见图.现可交换积分次序

原式 $= -\int_{-1}^{0} dy \int_{1-y}^{2} f(x,y)dx = -\int_{1}^{2} dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)dy = \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)dy$.

(4)【分析】 矩阵 A 的元素没有给出,因此用伴随矩阵、用初等行变换求逆的路均堵塞.应当考虑用定义法.

因为 $\quad (A-E)(A+2E)-2E = A^2 + A - 4E = 0$,

故 $\quad (A-E)(A+2E) = 2E$,即 $\quad (A-E)\cdot\dfrac{A+2E}{2} = E$.

按定义知 $\quad (A-E)^{-1} = \dfrac{1}{2}(A+2E)$.

(5)【分析】 根据切比雪夫不等式

$$P\{|X-E(X)| \ge \varepsilon\} \le \frac{D(x)}{\varepsilon^2},$$

于是 $\quad P\{|X-E(X)| \ge 2\} \le \dfrac{D(x)}{2^2} = \dfrac{1}{2}$.

二、选择题

(1)【分析】 当 $x<0$ 时, $f(x)$ 单调增 $\Rightarrow f'(x) \ge 0$,(A),(C)不对;

当 $x>0$ 时, $f(x)$:增——减——增 $\Rightarrow f'(x)$:正——负——正,(B)不对,(D)对.

应选(D).

(2)【分析】 我们逐一分析.

关于(A),涉及可微与可偏导的关系.由 $f(x,y)$ 在(0,0)存在两个偏导数 $\not\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在(0,0)处可微.因此(A)不一定成立.

关于(B)只能假设 $f(x,y)$ 在(0,0)存在偏导数 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$,不保证曲面 $z=f(x,y)$

在

$(0,0,f(0,0))$ 存在切平面.若存在时,法向量 **n=** $\pm\left\{\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}, -1\right\} = \pm$ **{3,1,-1}与{3,1,1}**

不共线,因而(B)不成立.

关于(C),该曲线的参数方程为$\begin{cases} x=t, \\ y=0, \\ z=f(t,0), \end{cases}$ 它在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为

$$\{t',0,\frac{d}{dt}f(t,0)\}|_{t=0}=\{1,0,f_x'(0,0)\}=\{1,0,3\}.$$

因此,(C)成立.

(3)**【分析】** 当$f(0)=0$时,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\exists \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}\exists$.

关于(A):$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}\overset{t=1-\cos h}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$,

由此可知 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)\exists \Leftrightarrow f_+'(0)\ \exists$.

若$f(x)$在$x=0$可导$\Rightarrow$(A)成立,反之若(A)成立$\Rightarrow f_+'(0)\ \exists \not\Rightarrow f'(0)\exists$. 如

$f(x)=|x|$满足(A),但$f'(0)$不$\exists$.

关于(D):若$f(x)$在$x=0$可导,$\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}[2\frac{f(2h)}{2h}-\frac{f(h)}{h}]=2f'(0)-f'(0).$$

$\Rightarrow$(D)成立.反之(D)成立$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}(f(2h)-f(h))=0 \not\Rightarrow f(x)$在$x=0$连续,$\not\Rightarrow f(x)$在$x=0$

可导.如$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 满足(D),但$f(x)$在$x=0$处不连续,因而$f'(0)$也不$\exists$.

再看(C):

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}\cdot\frac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}\cdot\frac{f(t)}{t}$(当它们都$\exists$时).

注意,易求得$\lim\limits_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}=0$.因而,若$f'(0)\exists \Rightarrow$(C)成立.反之若(C)成立$\not\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$(即

$f'(0)\exists$).因为只要$\frac{f(t)}{t}$有界,任有(C)成立,如$f(x)=|x|$满足(C),但$f'(0)$不$\exists$.

因此,只能选(B).

(4)**【分析】** 由 $|\lambda E-A|=\lambda^4-4\lambda^3=0$,知矩阵$A$的特征值是4,0,0,0.又因$A$是实对称矩阵,$A$必能相似对角化,所以$A$与对角矩阵$B$相似.

作为实对称矩阵,当$A\sim B$时,知A与B有相同的特征值,从而二次型x^TAx与x^TBx有相同的正负惯性指数,因此A与B合同.

所以本题应当选(A).

注意,实对称矩阵合同时,它们不一定相似,但相似时一定合同.例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} \text{与} B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix},$$

它们的特征值不同,故 A 与 B 不相似,但它们的正惯性指数均为 2,负惯性指数均为 0.所以 A 与 B 合同.

(5)**【分析】** 解本题的关键是明确 X 和 Y 的关系:$X+Y=n$,即 $Y=n-X$,在此基础上利用性质:相关系数 ρ_{XY} 的绝对值等于 1 的充要条件是随机变量 X 与 Y 之间存在线性关系,即 $Y=aX+b$(其中 a,b 是常数),且当 $a>0$ 时,$\rho_{XY}=1$;当 $a<0$ 时,$\rho_{XY}=-1$,由此便知 $\rho_{XY}=-1$,应选(A).

事实上,$Cov(X,Y)=Cov(X,n-X)=-DX$,$DY=D(n-X)=DX$,由此由相关系数的定义式有

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-1.$$

三、**【解】** 原式$=-\frac{1}{2}\int \arctan e^x d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}]$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{de^x}{e^{2x}}+\int\frac{de^x}{1+e^{2x}})$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x)+C.$$

四、**【解】** 先求 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$.

求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)|_{x=1}=3\varphi^2(1)\varphi'(1)=3\varphi'(1)$,归结为求 $\varphi'(1)$.由复合函数求导法

$$\varphi'(x)=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\frac{d}{dx}f(x,x),$$

$$\varphi'(1)=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)].$$

注意 $f_1'(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2$,$f_2'(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=3$.

因此 $\varphi'(1)=2+3(2+3)=17$,$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)|_{x=1}=3\times 17=51$.

五、**【分析与求解】** 关键是将 $\arctan x$ 展成幂级数,然后约去因子 x,再乘上 $1+x^2$ 并化简即

可.

直接将 $\arctan x$ 展开办不到,但 $(\arctan x)'$ 易展开,即

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ |x|<1, \quad ①$$

积分得 $\arctan x = \int_0^x (\arctan t)' dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in[-1,1]$. ②

因为右端积分在 $x=\pm1$ 时均收敛,又 $\arctan x$ 在 $x=\pm1$ 连续,所以展开式在收敛区间端点 $x=\pm1$ 成立.

现将②式两边同乘以 $\frac{1+x^2}{x}$ 得

$$\frac{1+x^2}{x}\arctan x = (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n}, \qquad x\in[-1,1],\ x\neq 0$$

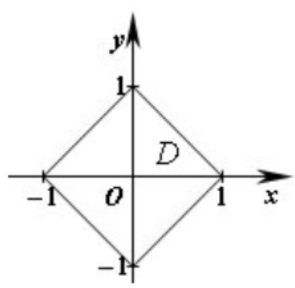
上式右端当 $x=0$ 时取值为 1,于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1].$$

上式中令 $x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{1}{2}(2\times\frac{\pi}{4}-1) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

六、【解】 用斯托克斯公式来计算.记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所为围部分.由 L 的定向,按右手法则 S 取上侧, S 的单位法向量

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$



于是由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_S[(-2y-4z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-6x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}]dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS\underline{\underline{(\text{利用}x+y+z=2)}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(6+x-y)dS.$$

于是 $\sqrt{1+Z_x'^2+Z_y'^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.

按第一类曲面积分化为二重积分得

$$I=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D(6+x-y)\sqrt{3}dxdy=-2\iint_D(6+x-y)dxdy,$$

其中 D 围 S 在 xy 平面上的投影区域 $|x|+|y|\le 1$（图）.由 D 关于 x,y 轴的对称性及被积函数的奇偶性得 $\iint_D(x-y)dxdy=0$

$\Rightarrow$ $I=-12\iint_D dxdy=-12(\sqrt{2})^2=-24$.

七、【证明】 ⑴由拉格朗日中值定理,$\forall x\in(1,-1)$, $x\neq 0$,$\exists\theta\in(0,1)$,使

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta x)$$

(θ 与 x 有关);又由 $f''(x)$ 连续而 $f''(x)\neq 0$, $f''(x)$ 在 $(1,-1)$ 不变号, $f'(x)$ 在 $(1,-1)$ 严格单调,θ 唯一.

⑵对 $f'(\theta x)$ 使用 $f''(0)$ 的定义.由题⑴中的式子先解出 $f'(\theta x)$,则有

$$f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

再改写成 $f'(\theta x)-f'(0)=\dfrac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x}$.

$$\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}\cdot\theta=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2},$$

解出 θ,令 $x\to 0$ 取极限得

$$\lim_{x\to 0}\theta=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\Big/\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}=\frac{\frac{1}{2}f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

八、【解】 (1) 设 t 时刻雪堆的体积为 $V(t)$,侧面积为 $S(t)$. t 时刻雪堆形状如图所示

先求 $S(t)$ 与 $V(t)$.

侧面方程是 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}((x,y)\in D_{xy}:x^2+y^2\le\dfrac{h^2(t)}{2})$.

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x}{h(t)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{h(t)}\ .$$

$$\Rightarrow \qquad S(t)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ dxdy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{\frac{h^2(t)+16(x^2+y^2)}{h(t)}}dxdy.$$

作极坐标变换: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则

$$D_{xy}:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}h(t).$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} S(t)&=\frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h(t)}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,rdr\\ &=\frac{2\pi}{h(t)}\cdot\frac{1}{48}[h^2(t)+16r^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h(t)}=\frac{13\pi}{12}h^2(t). \end{aligned}$$

用先二后一的积分顺序求三重积分 $\quad V(t)=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D(x)}dxdy$,

其中 $D(z)$: $\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\le h(t)-z(t)$,即 $x^2+y^2\le\dfrac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]$.

$$\Rightarrow \qquad V(t)=\int_0^{h(t)}\frac{\pi}{2}[h^2(t)-h(t)z]dz=\frac{\pi}{2}[h^3(t)-\frac{1}{2}h(t)^3]=\frac{\pi}{4}h^3(t).$$

(2) 按题意列出微分方程与初始条件.

体积减少的速度是 $-\dfrac{dV}{dt}$,它与侧面积成正比(比例系数 0.9),即 $\qquad \dfrac{dV}{dt}=-0.9S$

将 $V(t)$ 与 $S(t)$ 的表达式代入得 $\qquad \dfrac{\pi}{4}3h^2(t)\dfrac{dh}{dt}=-0.9\dfrac{13\pi}{12}h^2(t)$,即

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{13}{10}.$$

①

$$h(0)=130.$$

②

(3) 解①得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$.　　由②得 $C=130$,即 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$.

令 $h(t)=0$,得 $t=100$.因此,高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时.

九、【解】　由于 $\beta_i(i=1,2\cdots s)$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性组合,又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 是 $Ax=0$ 的解,所以根据齐次线性方程组解的性质知 $\beta_i(i=1,2\cdots s)$ 均为 $Ax=0$ 的解.

从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 是 $Ax=0$ 的基础解系,知 $s=n-r(A)$.

下面来分析 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性无关的条件.设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots\cdots k_s\beta_s=0$,即

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+(t_2k_2+t_1k_3)\alpha_3+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关,因此有

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s &=0, \\ t_2k_1+t_1k_2 &=0, \\ t_2k_2+t_1k_3 &=0, \\ \quad\cdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s &=0. \end{cases} \tag{*}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0\cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\,\vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$ 时,方程组(*)只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性无关.

十、【解】　(1) 由于 $AP=PB$,即

$$A(x,Ax,A^2x)=(Ax,A^2x,A^3x)=(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x)$$

$$=(x,Ax,A^2x)\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix},$$

所以$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$.

(2) 由(1)知 $A\sim B$,那么 $A+E\sim B+E$,从而

$$|A+E|=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

十一、【解】 (1) $P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots.$

(2) $P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m\mid X=n\}$

$$=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots.$$

十二、【解】 易见随机变量 $(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2})$, $\cdots,(X_n+X_{2n})$ 相互独立都服从正态分布 $N(2\mu,2\sigma^2)$.因此可以将它们看作是取自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的一个容量为 n 的简单随机样本.其样本均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\bar{X},$$

样本方差为

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Y.$$

因样本方差是总体方差的无偏估计,故 $E(\frac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$,即 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$.