

2002 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定,则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 可化成标准型 $f = 6y_1^2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面 4 条性质:

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续; ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续;
③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微; ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有

- (A) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①. (B) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①.
(C) ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ①. (D) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④.

(2) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

- (A) 发散. (B) 绝对收敛.
(C) 条件收敛. (D) 收敛性根据所给条件不能判定.

(3) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则

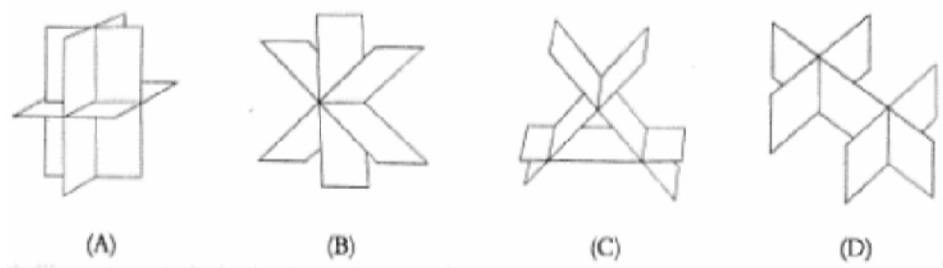
(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1, 2, 3$, 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为



(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则

(A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x) f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x) F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$, 若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{6^3}{6!} + \frac{9^3}{9!} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \dots$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足微分方程

$$y'' + y' + y = e^x;$$

(2) 利用 (1) 的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?

若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚下寻找一上山坡最大的点作为攀登的起点. 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使 (1) 中 $g(x, y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 A, B 为同阶方阵,

- (1) 若 A, B 相似, 证明 A, B 的特征多项式相等.
- (2) 举一个二阶方阵的例子说明 (1) 的逆命题不成立.
- (3) 当 A, B 均为实对称矩阵时, 证明 (1) 的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设维随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3,

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

2002 年考研数学一试题答案与解析

一、填空题

(1) 【分析】 原式 = $\int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = 1.$

(2) 【分析】 方程两边对 x 两次求导得

$$e^y y' + 6xy' + 6y + 2x = 0, \quad \text{①}$$

$$e^y y'' + e^y y'^2 + 6xy'' + 12y'y' + 2 = 0. \quad \text{②}$$

以 $x=0$ 代入原方程得 $y=0$, 以 $x=y=0$ 代入①得 $y'=0$, 再以 $x=y=y'=0$ 代入②得 $y''(0)=-2$.

(3) 【分析】 这是二阶的可降阶微分方程.

$$\text{令 } y' = P(y) \text{ (以 } y \text{ 为自变量), 则 } y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dP}{dx} = P \frac{dP}{dy}.$$

代入方程得 $yP \frac{dP}{dy} + P^2 = 0$, 即 $y \frac{dP}{dy} + P = 0$ (或 $P=0$, 但其不满足初始条件 $y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$).

$$\text{分离变量得 } \frac{dP}{P} + \frac{dy}{y} = 0,$$

$$\text{积分得 } \ln|P| + \ln|y| = C', \text{ 即 } P = \frac{C_1}{y} \text{ (} P=0 \text{ 对应 } C_1=0 \text{)};$$

由 $x=0$ 时 $y=1, P=y'=\frac{1}{2}$, 得 $C_1=\frac{1}{2}$. 于是

$$y' = P = \frac{1}{2y}, 2ydy = dx, \text{ 积分得 } y^2 = x + C_2.$$

又由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$, 所求特解为 $y=\sqrt{x+1}$.

(4) 【分析】 因为二次型 $x^T Ax$ 经正交变换化为标准型时, 标准形中平方项的系数就是二次型矩阵 A 的特征值, 所以 $6, 0, 0$ 是 A 的特征值.

$$\text{又因 } \sum a_{ii} = \sum \lambda_i, \text{ 故 } a + a + a = 6 + 0 + 0, \Rightarrow a = 2.$$

(5) 【分析】 设事件 A 表示 “二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根”, 则

$$A = \{16 - 4X < 0\} = \{X >$$

$$4\}. \text{ 依题意, 有 } P(A) = P\{X > 4\} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{而 } P\{X > 4\} = 1 - P\{X \leq 4\} = 1 - \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right),$$

$$\text{即 } 1 - \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}, \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}, \frac{4-\mu}{\sigma} = 0. \Rightarrow \mu = 4.$$

二、选择题

(1) 【分析】 这是讨论函数 $f(x, y)$ 的连续性, 可偏导性, 可微性及偏导数的连续性之间的关系. 我们知道, $f(x, y)$ 的两个偏导数连续是可微的充分条件, 若 $f(x, y)$ 可微则必连续, 故选 (A).

(2) 【分析】 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1 > 0 \Rightarrow n$ 充分大时即 $\exists N, n > N$ 时 $\frac{1}{u_n} > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$, 不妨

认为 $\forall n, u_n > 0$, 因而所考虑级数是交错级数, 但不能保证 $\frac{1}{u_n}$ 的单调性.

按定义考察部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{u_k} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{u_{k+1}} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k} + \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^l \frac{1}{u_l} = \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{u_1} \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 原级数收敛.

再考察取绝对值后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$. 注意 $\frac{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{u_n} + \frac{n+1}{u_{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow 2$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 发散. 因此选 (C).

(3) 【分析】 证明 (B) 对: 反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a \neq 0$, 则由拉格朗日中值定理,

$$f(2x) - f(x) = f'(\xi)x \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow +\infty)$$

(当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\xi \rightarrow +\infty$, 因为 $x < \xi < 2x$); 但这与 $|f(2x) - f(x)| \leq |f(2x)| + |f(x)| \leq 2M$

矛盾 ($|f(x)| \leq M$).

(4) 【分析】 因为 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 说明方程组有无穷多解, 所以三个平面有公共交点且不唯一, 因此应选 (B).

(A) 表示方程组有唯一解,其充要条件是 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$.

(C) 中三个平面没有公共交点,即方程组无解,又因三个平面中任两个都不行,故 $r(A) = 2$ 和

$r(\bar{A}) = 3$,且 A 中任两个平行向量都线性无关.

类似地,(D) 中有两个平面平行,故 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$,且 A 中有两个平行向量共线.

(5) 【分析】 首先可以否定选项(A)与(C),因

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = 2 \neq 1, \\ F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

对于选项(B),若 $f_1(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$,

$f_1(x)f_2(x) \equiv 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x) dx = 0 \neq 1$, 因此也应否定(C),综上分析,用排除法应选(D).

进一步分析可知,若令 $X = \max(X_1, X_2)$, 而 $X_i \sim f_i(x), i = 1, 2$, 则 X 的分布函数 $F(x)$ 恰是 $F_1(x)F_2(x)$.

$$F(x) = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} \\ = P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x).$$

三、【解】 用洛必达法则.由题设条件知

$$\lim_{h \rightarrow 0} [af(h) + bf(2h) - f(0)] = (a+b-1)f(0). \text{ 由于 } f'(0) \neq 0, \text{ 故必有 } a+b-1=0.$$

$$\text{又由洛必达法则 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af'(h) + 2bf'(2h)}{1} \\ = (a+2b)f'(0) = 0,$$

及 $f'(0) \neq 0$, 则有 $a+2b=0$.

综上,得 $a=2, b=-1$.

四、【解】 由已知条件得

$$f(0) = 0, f'(0) = \left(\int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt \right)' \Big|_{x=0} = \frac{e^{-\arctan^2 x}}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1,$$

故所求切线方程为 $y=x$. 由导数定义及数列极限与函数极限的关系可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 f'(0) = 2.$$

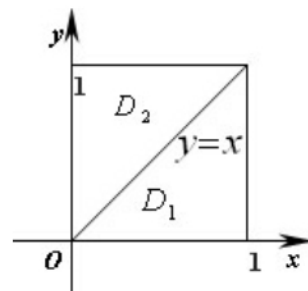
五、【分析与求解】 D 是正方形区域如图.因在 D 上被积函数分块表示

$$\max\{x^2, y^2\} = \begin{cases} x^2, & x \geq y, \\ y^2, & x \leq y, \end{cases} (x, y) \in D,$$

于是要用分块积分法,用 $y = x$ 将 D 分成两块:

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 = D \mid \{y \leq x\}, D_2 = D \mid \{y \geq x\}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_{D_1} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy \\ &= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy \quad (D \text{ 关于 } y = x \text{ 对称}) \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy \quad (\text{选择积分顺序}) = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$



六、【分析与求解】 (1) 易知 $Pdx + Qdy$ 原函数,

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy &= \frac{1}{y} dx + yf(xy)dx + xf(xy)dy - \frac{x}{y^2} dy = \frac{1}{y^2} (ydx - xdy) + f(xy)(ydx + xdy) \\ &= d\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)d(xy) = d\left[\frac{x}{y} + \int_0^{xy} f(t)dt\right]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 在 $y > 0$ 上 $Pdx + Qdy$ 原函数, 即 $u(x, y) = \frac{x}{y} + \int_0^{xy} f(t)dt$.

$\Rightarrow$ 积分 I 在 $y > 0$ 与路径无关.

$$(2) \text{ 因找到了原函数, 立即可得 } I = u(x, y) \Big|_{(a,b)}^{(c,d)} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

七、【证明】 与书上解答略有不同, 参见数三 2002 第七题 (1) 因为幂级数

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \dots$$

的收敛域是 $(-\infty < x < \infty)$, 因而可在 $(-\infty < x < \infty)$ 上逐项求导数, 得

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$

$$y''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots,$$

所以 $y'' + y' + y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x \quad (-\infty < x < \infty).$

(2) 与 $y'' + y' + y = e^x$ 相应的齐次微分方程为 $y'' + y' + y = 0$,

其特征方程为 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

因此齐次微分方程的通解为 $Y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

设非齐次微分方程的特解为 $y^* = Ae^x$, 将 y^* 代入方程 $y'' + y' + y = e^x$ 可得

$$A = \frac{1}{3}, \text{ 即有 } y^* = \frac{1}{3}e^x.$$

于是, 方程通解为 $y = Y + y^* = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{3}e^x$.

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 有 } \begin{cases} y(0) = 1 = C_1 + \frac{1}{3}, \\ y'(0) = 0 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{3}. \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0.$$

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为 $y(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x \quad (-\infty < x < \infty)$

八、【分析与求解】 (1) 由梯度向量的重要性质: 函数 $h(x, y)$ 在点 M 处沿该点的梯度方向

$$\text{grad}h(x, y)\big|_{(x_0, y_0)} = \left\{ \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \{-2x_0 + y_0, -2y_0 + x_0\}$$

方向导数取最大值即 $\text{grad}h(x, y)\big|_{(x_0, y_0)}$ 的模, $\Rightarrow g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2}$.

(2) 按题意, 即求 $g(x, y)$ 求在条件 $x^2 + y^2 - xy - 75 = 0$ 下的最大值点 $\Leftrightarrow$

$$g^2(x, y) = (y - 2x)^2 + (x - 2y)^2 = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$$

在条件 $x^2 + y^2 - xy - 75 = 0$ 下的最大值点.

这是求解条件最值问题,用拉格朗日乘子法.令拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 75),$$

则有
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 10x - 8y + \lambda(2x - y) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 10y - 8x + \lambda(2y - x) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0. \end{cases}$$

解此方程组:将①式与②式相加得 $(x + y)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow x = -y$ 或 $\lambda = -2$.

若 $y = -x$,则由③式得 $3x^2 = 75$ 即 $x = \pm 5, y = \mp 5$. 若 $\lambda = -2$,由①或②均得 $y = x$,代入

③式得 $x^2 = 75$ 即 $x = \pm 5\sqrt{3}, y = \pm 5\sqrt{3}$. 于是得可能的条件极值点

$$M_1(5, -5), M_2(-5, 5), M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}).$$

现比较 $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ 在这些点的函数值:

$$f(M_1) = f(M_2) = 450, f(M_3) = f(M_4) = 150.$$

因为实际问题存在最大值,而最大值又只可能在 M_1, M_2, M_3, M_4 中取到.因此 $g^2(x, y)$ 在

M_1, M_2 取到在 D 的边界上的最大值,即 M_1, M_2 可作为攀登的起点.

九、【解】 由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关及 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 知,向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$,即矩阵 A 的秩为 3. 因此 $Ax = 0$ 的基础解系中只包含一个向量.那么由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

知, $Ax = 0$ 的基础解系是 $(1, -2, 1, 0)^T$.

$$\text{再由 } \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 知, } (1, 1, 1, 1)^T \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的一个}$$

特解.故 $Ax = \beta$ 的通解是 $k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

十、【解】 (1) 若 A, B 相似, 那么存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 故

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda EP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}||\lambda E - A||P| = |\lambda E - A|. \end{aligned}$$

(2) 令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 那么 $|\lambda E - A| = \lambda^2 = |\lambda E - B|$.

但 A, B 不相似. 否则, 存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B = 0$. 从而 $A = P0P^{-1} = 0$, 矛盾, 亦可从 $r(A) = 1, r(B) = 0$ 而知 A 与 B 不相似.

(3) 由 A, B 均为实对称矩阵知, A, B 均相似于对角阵, 若 A, B 的特征多项式相等, 记特征多项式的根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则有

$$A \text{ 相似于 } \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \text{O} & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, B \text{ 也相似于 } \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \text{O} & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

即存在可逆矩阵 P, Q , 使 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \text{O} & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = Q^{-1}BQ$.

于是 $(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B$. 由 PQ^{-1} 为可逆矩阵知, A 与 B 相似.

十一、【解】 由于 $P\{X > \frac{\pi}{3}\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}$, 依题意, Y 服从二项分布 $B(4, \frac{1}{2})$, 则有

$$EY^2 = DY + (EY)^2 = npq + (np)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (4 \times \frac{1}{2})^2 = 5.$$

十二、【解】 $EX = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2 \times \theta^2 + 3 \times (1-2\theta) = 3 - 4\theta$, $\theta = \frac{1}{4}(3 - EX)$.

θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}(3 - \bar{X})$, 根据给定的样本观察值计算 $\bar{x} = \frac{1}{8}(3 + 1 + 3 + 0 + 3 + 1 + 2 + 3)$

$= 2$. 因此 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}(3 - \bar{x}) = \frac{1}{4}$.

对于给定的样本值似然函数为

$$L(\theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4, \ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln \theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = \frac{24\theta^2 - 28\theta + 6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 得方程 $12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0$, 解得 $\theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$ ($\theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$, 不合题意).

于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$.