2016 考研数学一完整真题及答案解析（详解版）

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则（　　）

$(A)\,a<1$且$b>1$　$(B)\,a>1$且$b>1$　$(C)\,a<1$且$a+b>1$　$(D)\,a>1$且$a+b>1$

【答案】（C）

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$$

$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$在（$p<1$时收敛），可知$a<1$，而此时$(1+x)^b$不影响

同理，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a+b}\left(1+\frac{1}{x}\right)^b}dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$（$p>1$时收敛），而此时$\left(1+\frac{1}{x}\right)^b$不影响

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\ge1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

$(A)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\ge1\end{cases}$　$(B)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\ge1\end{cases}$

$(C)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\ge1\end{cases}$　$(D)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\ge1\end{cases}$

【答案】（D）

【解析】由已知可得，$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+C_1 & x<1\\ x(\ln x-1)+C_1+1 & x\ge 1\end{cases}$，取 $C_1=0$，故选 D

（3）若 $y_1=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2}, y_2=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（ ）

$(A)3x\left(1+x^2\right)$ $(B)-3x\left(1+x^2\right)$ $(C)\dfrac{x}{1+x^2}$ $(D)-\dfrac{x}{1+x^2}$

【答案】（A）

【解析】$y_1-y_2=-2\sqrt{1+x^2}$ 是一阶齐次微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入得 $-2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)(-2\sqrt{1+x^2})=0$，所以 $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$，根据解的性质得，$\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 是 $y'+p(x)y=f(x)$ 的解。所以有 $q(x)=3x(1+x^2)$.

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\le 0\\ \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}, n=1,2,\dots\end{cases}$，则（ ）

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 （B） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导 （D） $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

【答案】（D）

【解析】由于 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}}=1$，故选 D。

（5）设 A，B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（ ）

（A） A^T 与 B^T 相似 （B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似 （D） $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】（C）

【解析】此题是找错误的选项。由 A 与 B 相似可知，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则

(1) $(P^{-1}AP)^T=B^T\Rightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T\Rightarrow A^T\sim B^T$，故（A）不选；

(2) $(P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1}\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}\Rightarrow A^{-1}\sim B^{-1}$，故（$B$）不选；

(3) $P^{-1}(A+A^{-1})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=B+B^{-1}\Rightarrow A+A^{-1}\sim B+B^{-1}$，故（$D$）不选；

此外，在（C）中，对于 $P^{-1}(A+A^T)P=P^{-1}AP+P^{-1}A^TP$，若 $P^{-1}AP=B$，则 $P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$，而 $P^{-1}A^TP$ 未必等于 B^T，故（C）符合题意。综上可知，（C）为正确选项。

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面　　（C）椭球面　　（D）柱面

【答案】（B）

【解析】对于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$， 其矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$$

接下来由 $|\lambda E-A|=0$， 可得其特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$（一正两负）。故二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为 $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$，即

$$5y_1^2-y_2^2-y_3^2=2\Rightarrow\frac{y_1^2}{(\sqrt{\frac{2}{5}})^2}-\frac{y_2^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y_3^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$，其对应的曲面为双叶双曲面。

（7）设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)\left(\sigma>0\right)$，记 $p=P\left\{X\le\mu+\sigma^2\right\}$，则（　　）

（A） p 随着 μ 的增加而增加　　（B） p 随着 σ 的增加而增加

（C） p 随着 μ 的增加而减少　　（D） p 随着 σ 的增加而减少

【答案】（B）

【解析】$P\{X\le\mu+\sigma^2\}=P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\}$

所以概率随着 σ 的增大而增大。

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

（A） $-\frac{1}{2}$　（B） $-\frac{1}{3}$　（C） $\frac{1}{2}$　（D） $\frac{1}{3}$

【答案】（A）

【解析】$X\sim B(2,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{3})$

$$EX=EY=\frac{2}{3},DX=DY=\frac{4}{9},\quad EXY=1\cdot1\cdot P(X=1,Y=1)=\frac{2}{9}$$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\dfrac{1}{2}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln\left(1+t\sin t\right)dt}{1-\cos x^2}=$ __________

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$

（10）向量场 $A\left(x,y,z\right)=\left(x+y+z\right)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$ __________

【答案】$(0,1,y-1)$

【解析】由旋度公式得，$rot(\mathrm{A})=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}=\{0,1,y-1\}$

11、设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 有方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则

$dz\big|_{(0,1)}=$____ .

【答案】$-dx+2dy$

【解析】$(x+1)x-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导得

$\begin{matrix} z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)(1-z_x') \\ (x+1)z_y'-2y=x^2(f_1'(x-z,y)(-z_y')+f_2'(x-z,y)) \end{matrix}$，将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得，

$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$________

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x\left(1-ax^2+o(x^2)\right)=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)$，又由于

$f'''(0)=1$，

$a=\frac{1}{2}$

（13）行列式$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$______.

【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

（14）设$x_1, x_2, \ldots, x_n$为来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，样本均值$\bar{x}=9.5$，参数μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

【答案】$(8.2, 10.8)$

【解析】$P\{-u_{0.025} < \dfrac{\bar{x}-u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{0.025}\} = P\{\bar{x} - u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < u < \bar{x} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025}\} = 0.95$

因为$\bar{x} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025} = 10.8$，所以$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025} = 1.3$，所以置信下限$\bar{x} - u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8.2$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知平面区域$D = \left\{ (r, \theta) \middle| 2 \le r \le 2(1+\cos\theta), -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D x\,dxdy$.

【答案】$5\pi+\dfrac{32}{3}$

【解析】$\iint\limits_D xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2}^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\dfrac{r^3}{3}\Big|_2^{2(1+\cos\theta)}d\theta$

$=\dfrac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)d\theta$

$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta+\dfrac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$

$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos2\theta+1}{2}d\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta+\dfrac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\sin\theta$

$=4\left(\dfrac{\sin2\theta}{2}+\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+8\left(\sin\theta-\dfrac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$

$=4\pi+\dfrac{32}{3}-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta$

$=5\pi+\dfrac{32}{3}$

（16）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$.

(I) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛；

(II) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值.

【答案】(II) $\dfrac{3}{k}$

【解析】

（1）特征方程为 $r^2+2r+k=0$，由 $0<k<1$ 可知，特征方程有两个不相同的特征根

$r_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2}=-1\pm\sqrt{1-k}$ 且 $r_{1,2}<0$，

由二阶常系数齐次线性方程的求解可知，$y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

$$\int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty}\left[C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\right]dx$$

$$= \int_0^{+\infty} C_1e^{r_1x}dx + \int_0^{+\infty} C_2e^{r_2x}dx$$

$$= \frac{C_1}{r_1}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{r_1x}-1\right]+\frac{C_2}{r_2}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{r_2x}-1\right]$$

由于$r_{1,2}<0$

$\int_0^{+\infty} y(x)dx = -\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}$极限存在，故收敛.

(2) 由$y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$，$y(0)=1, y'(0)=1$可知，

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1r_1+C_2r_2=1 \\ r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k} \end{cases}$$ 解得$C_1=C_2=\frac{1}{2}$

代入$\int_0^{+\infty} y(x)dx = -\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}$可知$\int_0^{+\infty} y(x)dx = \frac{\sqrt{1-k}}{k}$

（17）（本题满分 10 分）设函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$,且$f(0,y)=y+1$, L_t是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算曲线积分$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求$I(t)$的最小值

【答案】3

【解析】

(1) 由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$

可知：$f(x,y)=\int[(2x+1)e^{2x-y}]dx$

$$=e^{-y}[\int 2xe^{2x}dx+\int e^{2x}dx]$$

$$=e^{-y}\bullet xe^{2x}+\varphi(y)$$

$$=xe^{2x-y}+\varphi(y)$$

又 $f(0,y)=y+1$ 可知 $\varphi(y)=y+1$

因此 $f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1$$

$$I(t)=\int_{Lt}(2x+1)e^{2x-y}dx+(1-xe^{2x-y})dy$$

$P=(2x+1)e^{2x-y}$ $\qquad Q=1-xe^{2x-y}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-(2x+1)e^{2x-y}$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-e^{2x-y}-2xe^{2x-y}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 因此，积分与路径无关

$$I(t)=\int_{Lt}(2x+1)e^{2x-y}dx+(1-xe^{2x-y})dy$$

$$=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t(1-e^{2-y})dy$$

$$=e^2+t+e^{2-t}-e^2$$

$=t+e^{2-t}$

(2) $I(t)=t+e^{2-t}$

$I'(t)=1-e^{2-t}$

$I'(t)=0$ 可知 $t=2$

有唯一驻点

$I''(t)=e^{2-t}$

$I''(2)=1>0$

因此 $t=2$时 $I(t)$有最小值

$I(2)=2+e^{2-2}=2+1=3$

（18）设有界区域Ω由平面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，Σ为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$

$P=x^2+1,Q=-2y,R=3z$

由高斯公式可知，

$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x-2+3)dxdydz$

$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)dxdydz$

$=\iint dxdy\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}(2x+1)dz$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(2x^2+x-xy-\frac{y}{2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-2x}\left(2x^2+x-xy-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}$$

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2...)$，证明：

（I）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（II）$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

【证明】 $x_{n+1}=f(x_n)$

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$$

$$<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$=\frac{1}{2}|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$

$$<\frac{1}{2}|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

<L

$$<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$

显然，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛

因此，$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$的前 n 项和记为 S_n

易知，$S_n = x_{n+1}-x_1$，由第一问可知 S_n 极限存在，因此$\lim_{n\to\infty} x_n = A$存在

$x_{n+1} = f(x_n) = f(x_n) - f(0) + 1$

$= f'(\xi)x_n + 1$（*）

i)由已知$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$，易知$x_{n+1} = f'(\xi)x_n + 1 < \frac{1}{2}x_n = 1$

不等式两边取极限，可知$A < \frac{1}{2}A + 1$，即$A < 2$；

ii)若 $A = 0$，则（*）矛盾；

iii)若 $A < 0$，则由（*）可知$(1 - f'(\xi))A = 1$，而$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$，显然矛盾

综上，$0 < A < 2$

（20）（本题满分 11 分）设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$

当a为何值时，方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？

【答案】$a=-2$时，无解；$a=1$时，有无穷多解，$X=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -k_1-1 & -k_2-1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$；$a\neq -2$且$a\neq 1$时，有唯一解，$X=\begin{pmatrix}1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

【解析】（20）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$

当a为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？

【答案】$a=-2$时，无解；$a=1$时，有无穷多解，$X=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -k_1-1 & -k_2-1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$；$a\neq -2$且$a\neq 1$时，有唯一解，$X=\begin{pmatrix}1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

【解析】对 $AX=B$ 的增广阵做初等变换

$$(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0\end{pmatrix}$$

1) $|A|\neq 0$，即$a\neq 1$且$a\neq -2$时，唯一解。

2) $|A|=0$时$a=1$或$a=-2$

1、$a=-2$时，代入得矛盾方程，无解。

2、$a=1$时，代入得$r(A)<3$，故无穷多解。

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（I）求 A^{99}

（II）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

【答案】（1）$\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（2）
$$\begin{aligned}\beta_1&=\left(-2+2^{99}\right)\alpha_1+\left(-2+2^{100}\right)\alpha_2,\\ \beta_2&=\left(1-2^{99}\right)\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2,\\ \beta_3&=\left(2-2^{98}\right)\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2\end{aligned}$$

【解析】

（Ⅰ）利用相似对角化。

由 $|\lambda E-A|=0$，可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，故 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量为 $\gamma_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$$\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为

$$\gamma_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

设 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$ 可得 $A=P\Lambda P^{-1}$，

$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}$，

对于 $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，利用初等变换，可求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（Ⅱ）$B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$，由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，故

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，因此，

$$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2,\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2.$$

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1,X\le Y\\0,X>Y\end{cases}$$

（I）写出 (X,Y) 的概率密度；

（II）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

【答案】

（I）$f(x,y)=\begin{cases}3,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\\0,\text{其他}\end{cases}$

（II）U 与 X 不独立，因为 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$；

（III）Z 的分布函数

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, 1\le z<2\\ 1, z\ge 2\end{cases}$$

【解析】（1）区域 D 的面积 $s(D)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)=\frac{1}{3}$，因为 $f(x,y)$ 服从区域 D 上的均匀分布，所以

$$f(x,y)=\begin{cases}3 & x^2<y<\sqrt{x}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

（2）X 与 U 不独立.

因为 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{12}$

$$P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

所以 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$,故 X 与 U 不独立。

（3）$F_Z(z)=P\{U+X\le z\}=P\{U+X\le z|U=0\}P\{U=0\}+P\{U+X\le z|U=1\}P\{U=1\}$

$$=\frac{P\{U+X\le z,U=0\}}{P\{U=0\}}P\{U=0\}+\frac{P\{U+X\le z,U=1\}}{P\{U=1\}}P\{U=1\}$$

$$=P\{X\le z,X>Y\}+P\{1+X\le z,X\le Y\}$$

又 $$P\{X\le z,X>Y\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \dfrac{1}{2}, & z\ge 1\end{cases},$$

$$P\{X+1\le z,X\le Y\}=\begin{cases}0, & z<1\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ \dfrac{1}{2}, & z\ge 2\end{cases}$$

所以 $$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

（23）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,其他\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

（1）求 T 的概率密度

（2）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计

【答案】

（I）T 的概率密度

$$F_z(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^8}{\theta^9},0<x<\theta\\ 0,其他\end{cases}$$

（II） $a=\frac{10}{9}$

【解析】（1）根据题意，X_1,X_2,X_3独立同分布，T的分布函数为

$$F_T(t)=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}$$

$$=P\{X_1\le t\}P\{X_2\le t\}P\{X_3\le t\}=\left(P\{X_1\le t\}\right)^3$$

当$t<0$时，$F_T(t)=0$；

当$0<t<\theta$时，$F_T(t)=\left(\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}d\theta\right)^3=\frac{t^9}{\theta^9}$；

当$t\ge 0$时，$F_T(t)=1$，

所以$f_T(t)=\begin{cases}\frac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta\\ 0, & others\end{cases}$。

（2）$E(aT)=aET=a\int_0^\theta t\frac{9t^8}{\theta^9}dt=\frac{9}{10}a\theta$，

根据题意，aT为θ的无偏估计，

则$E(aT)=\frac{9}{10}a\theta=\theta$，即$a=\frac{10}{9}$