2019年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试卷

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）当$x \to 0$时，若$x - \tan x$与x^k是同阶无穷小，则k=（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2）设函数$f(x)=\begin{cases} x|x|, & x \le 0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的（　　）

(A)可导点，极值点　　(B) 不可导点，极值点

(C)可导点，非极值点　　(D) 不可导点，非极值点

（3）设$\{u_n\}$是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{u_n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

（4）设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$.如果对上半平面$(y>0)$内的任意有向光滑封闭曲线C都有

$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$,那么函数$P(x,y)$可取为（　　）

(A) $y-\frac{x^2}{y^3}$　　(B) $\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$　　(C) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$　　(D) $x-\frac{1}{y}$

（5）设A是3阶实对称矩阵，E是3阶单位矩阵，若$A^2+A=2E$,且$|A|=4$，则二次型x^TAx的规范为（　　）

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

（6）如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\left(i=1,2,3\right)$组成的

线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为$A,\overline{A}$,则（　　）

(A) $r(A)=2,r(\overline{A})=3$　　(B) $r(A)=2,r(\overline{A})=2$

(C) $r(A)=1, r(\overline{A})=2$ (D) $r(A)=1, r(\overline{A})=1$

(7) 设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$的充分必要条件是（ ）

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ (D) $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

(8) 设随机变量X与Y相互独立，且都服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|<1\}$（ ）

(A) 与μ无关，而与σ^2有关 (B) 与μ有关，而与σ^2无关

(C) 与μ，σ^2都有关 (D) 与μ，σ^2都无关

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9) 设函数$f(u)$可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则$\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

(10) 微分方程$2yy'-y^2-2=0$满足条件$y(0)=1$的特解$y=$__________.

(11) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$s(x)=$ __________.

(12) 设Σ为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$的上侧，则$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy=$ __________.

(13) 设$A=(a_1,a_2,a_3)$为3阶矩阵，若a_1,a_2线性无关，且$a_3=-a_1+2a_2$,则线性方程组$Ax=0$的通解为__________.

(14) 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数，$EX$为$X$的数学期望，则$P\{F(X)>EX-1\}=$__________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本题满分 10 分）

设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(0)=0$的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

（16）（本题满分 10 分）

设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $l=-3i-4j$ 的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求 a,b；

（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2\left(z\geq 0\right)$ 的面积.

（17）（本题满分 10 分）

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\left(x\geq 0\right)$ 与 x 轴之间图形的面积.

（18）（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

（19）（本题满分 10 分）

设 Ω 是由锥面在 $x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

（20）（本题满分 11 分）

设向量组 $x_1=(1,2,1)^T\,x_2=(1,3,2)^T\,x_3=(1,a,3)^T$ 为 R^3 的一个基，$\beta=(1,1,1)^T$ 在基下的坐标 $(b,c,1)^T$.

⑴ 求 a,b,c；

⑵ 证明 a_2,a_3,β 为 R^3 的一个基.并求 a_2,a_3,β 到 a_1,a_2,a_3 的过渡矩阵.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$相似.

⑴ 求x、y;

⑵ 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布. Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$,令$Z=XY$

（1） 求Z的概率密度；

（2） p为何值时，X与Y不相关；

（3）X与Z是否相互独立.

（23）（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu.\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

⑴ 求A；

⑵ 求σ^2的最大似然估计量.

2019年全国硕士研究生入学统一考试

(数学一)答案

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)**【答案】**(C)

【解析】因 $x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$，则 $k=3$，故选 C.

(2)**【答案】**(B)

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 不存在，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点；

又因为 $f(x)$ 连续，当 $x<0$ 时，$f'(x)=-2x>0$，当 $0<x<e^{-1}$ 时，$f'(x)=\ln x+1<0$，

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

(3)**【答案】**(B)

【解析】由单调有界原理知 $\lim u_n$ 存在，由有界性 $\exists C>0$ 满足 $|u_n|\le C$，

则 $\left|u^2_{n+1}-u^2_n\right|=\left|(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)\right|\le 2C(u_{n+1}-u_n)$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_{n+1}-u_1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}-u_1$，因 $\{u_n\}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u^2_{n+1}-u^2_n)$ 绝对收敛.

(4)**【答案】**(D)

【解析】 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}$，故只需选择在上半平面有连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}$ 的 P 函数只有 D 选项成立.

(5)**【答案】**(C)

【解析】设 λ 是 A 的特征值，根据 $A^2+A=2E$，得 $\lambda^2+\lambda=2$，解得 $\lambda=1$ 或 -2，所以 A 的特征值是 1 或 -2.

因为 $|A|=4$，所以 A 的三个特征值为 $1,-2,-2$.从而二次型 x^TAx 的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，故应选 C.

(6)**【答案】**(A)

【解析】因为他们两两相交，且交线相互平行，所以 $r(A)\ne r(\overline{A})\le3$，所以排除 B 和 D 选项；

又因为他们两两相交，故其中任意两个平面不平行，所以 $2\le r(A)$，故选 A.

(7)**【答案】**(C)

【解析】 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$, $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$,所以 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Leftrightarrow P(A)=P(B)$

故选(C).

(8)**【答案】**(A)

【解析】 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 相互独立，则

$E(X-Y)=0,D(X-Y)=DX+DY=2\sigma^2$,所以 $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

$P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\frac{|X-Y|}{\sqrt{2}\sigma}<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$ 与 σ^2 有关,故选(A).

二、填空题：9－14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)【答案】$\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

【解析】因 $z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\cos x\cdot f'+y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y\cdot f'+x$，

则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-f'+\frac{y}{\cos x}+f'+\frac{x}{\cos y}=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$.

(10)【答案】$y=\sqrt{3e^x-2}$

【解析】$y'=\frac{y^2+2}{2y}\Rightarrow\frac{2y}{y^2+2}dy=dx\Rightarrow\int\frac{2y}{y^2+2}dy=\int dx$,

则 $\ln(y^2+2)=x+\ln c\Rightarrow y^2+2=ce^x$.

因 $y(0)=1$, 则 $c=3$，则 $y=\sqrt{3e^x-2}$.

(11)【答案】$e^{-\frac{x}{2}}$

【解析】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$

(12)【答案】$\frac{32}{3}$

【解析】将曲面方程代入积分表达式中有，原积分为

$=\iint_{\Sigma}|y|dxdy$ 由 Σ 关于 xoz 平面对称，则其可化为

$=2\iint_{\Sigma_1}ydxdy$，其中为 Σ_1 曲面 Σ 的右半侧（$y\geq 0$）

$=2\iint_{D_{xy}}ydxdy$，其中 D_{xy} 为 Σ_1 在 xoy 平面的投影，

$=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin\theta dr=\frac{32}{3}$.

(13)【答案】

$$x = k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

【解析】因为α_1,α_2线性无关，所以$r(A)\geq 2$.又因为$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$r(A)<3$，于是$r(A)=2$.所以$Ax=0$的基础解系中有一个向量.

(14)【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】方法1：$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, 0<x<2 \\ 0, 其他 \end{cases}$

$$EX=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{4}{3},\quad F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \frac{x^2}{4}, 0\leq x<2 \\ 1, 2\leq x \end{cases}$$

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{F(X)>\frac{1}{3}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}$$

方法二：易知$Y=F(X)\sim U(0,1)$，

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{Y>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{Y>\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}$$

三、解答题：15～23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)【解析】(1)由一阶线性微分方程公式得：

$$y=e^{-\int xdx}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int xdx}dx+c\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(x+c)$$

由题目知$y(0)=0$，可得$c=0$，故$y(x)=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(2)由(1)知$y(x)=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$，可得$y'(x)=(1-x^2)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$　$y''(x)=(x^3-3x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$，

令 $y''(x)=(x^3-3x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，可得 $x=0,\pm\sqrt{3}$，

当 $x<-\sqrt{3}$ 或 $0<x<\sqrt{3}$ 时，$y''(x)<0$；

当 $-\sqrt{3}<x<0$ 或 $x>\sqrt{3}$ 时，$y''(x)>0$.

综上所述，$y(x)$ 的凹区间为：$\left(-\sqrt{3},0\right)$ 和 $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$；

$y(x)$ 的凸区间为：$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ 和 $\left(0,\sqrt{3}\right)$；

拐点为：$\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$，$(0,0)$，$\left(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

(16)【解析】(1)函数梯度为 $\nabla Z=(2ax,2ay)$，则函数在点 $(3,4)$ 处梯度为 $(6a,8b)$ 则可知沿方向 $(-3,-4)$ 的最大方向导数为 $\sqrt{(6a)^2+(8b)^2}=10$ 且 $\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}$ 时可知方向导数取最大值则可知 $\begin{cases}a=b\\36a^2+64b^2=100\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$（舍），则可知函数表达式为 $z=2-x^2-y^2$；

(2)所求曲面面积为

$$S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr=2\pi\cdot\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi.$$

(17)【解析】要计算 $S=\int_0^{+\infty}e^{-x}\left|\sin x\right|dx$，

首先要计算 $\int e^{-x}\sin xdx=-\dfrac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)+C$，

当 $k=0,2,4,6\cdots$，$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=-\dfrac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\dfrac{1}{2}e^{-k\pi}\left(1+e^{-\pi}\right)$，

当 $k=1,3,5,7\cdots$，$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\dfrac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\dfrac{1}{2}e^{-k\pi}\left(1+e^{-\pi}\right)$，

$$S=\int_0^{+\infty}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\pi}=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

(18)【解析】(1) $a_n-a_{n-1}=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1x^{n-1}(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$，

则 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

$$a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)dt=I_n-I_{n+2}=\frac{1}{n+2}I_n,$$

则 $a_{n-2}=\frac{1}{n}I_{n-2}$，则 $a_n=\frac{n-1}{n(n+2)}I_{n-2}=\frac{n-1}{(n+2)}a_{n-2}$.

(2)由(1)知，$\{a_n\}$ 单调递减，则 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\frac{n-1}{n+2}a_{n-1}$，即 $\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$，

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(19)【解析】根据对称性可知 $\bar{x}=0,\bar{y}=2$. 而 xoy 面的投影为 $x^2+(y-2)^2\le 1$.

因 $\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdv}{\iiint\limits_{\Omega}dv}$，根据圆锥的体积计算公式 $\iiint\limits_{\Omega}dv=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1=\frac{1}{3}\pi$，

根据先二后一可得 $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^1\pi(1-z)^2zdz=\frac{\pi}{12}$，

则 $\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdv}{\iiint\limits_{\Omega}dv}=\frac{\frac{1}{3}\pi}{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4}$，故形心坐标为 $(0,2,\frac{1}{4})$.

(20)【解析】(1)设 $b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3=\beta$，则 $\begin{cases}b+c+1=1\\2b+3c+a=1\\b+2c+3=1\end{cases}$.

解得 $a=3,b=2,c=-2$.

(2)设 $(\alpha_2,\alpha_3,\beta)P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则

$$(\alpha_2,\alpha_3,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\3&3&1&2&3&3\\2&3&1&1&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&0&0\\0&1&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&1&-1&-1&0&1\\0&0&-2&-1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&2&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right)$$

由于 $r(\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$，所以 α_2,α_3,β 为 R^3 的一个基，$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$.

(21)【解析】(1)因为 A 与 B 相似，所以 $\begin{cases}\begin{vmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{vmatrix}=-2y\\-2+x-2=2-1+y\end{cases}$，

故 $\begin{cases}2x+y=4\\x-y=5\end{cases}$，所以 $x=3,y=-2$.

(2) $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=2$ 时，$(2E-A)x=0$，得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$(2E-B)x=0$,得 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时，$(-E-A)x$=0，得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$(-E-B)x$=0，得 $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=-2$ 时 $(-2E-A)x$=0，得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$

$$(-2E-B)x=0，得\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$

$$P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$$

则 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$

故 $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$ 使 $P^{-1}AP=B$.

(22)【解析】(1) $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\0, & 其他\end{cases}$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=P\{XY\le z,Y=-1\}+P\{XY\le z,Y=1\}$$

$$=P\{X\ge -z,Y=-1\}+P\{X\le z,Y=1\}=p[1-F_X(-z)]+(1-p)F_X(z)$$

则 $f_Z(z)=F_Z'(z)=pf_X(-z)+(1-p)f_X(z)$

又 $f_X(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0\\0, & 其他\end{cases}$，$\Rightarrow f_X(-z)=\begin{cases}e^{z}, & z<0\\0, & 其他\end{cases}$，

故 $f_Z(z)=\begin{cases}pe^{z},z<0\\(1-p)e^{-z},z>0\\0,z=0\end{cases}$.

(2) X 和 Z 不相关，则 $\rho=0$，即 $Cov(X,Z)=0$，得到 $E(XZ)=EXEZ$，

$EY=1-2p,EZ=E(XY)=EX\cdot EY=1-2p$，

$EX=1, EX^2=DX+(EX)^2=1+1=2$，

$E(XZ)=E(X^2Y)=EX^2\cdot EY=2(1-2p)$，

由 $E(XZ)=EX\cdot EZ$ 得 $2(1-2p)=1-2p$，解得：$p=\dfrac{1}{2}$.

(3) $A=\{X>1\}, B=\{Z<1\}$，

$$P(AB)=P\{X>1, XY<1\}=P\left\{X>1, Y<\frac{1}{X}\right\}=P\{X>1, Y=-1\}=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{-1}，$$

$P(A)=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1}$，

$$P(B)=P\{XY<1\}=P\{XY<1, Y=-1\}+P\{XY<1, Y=1\}$$

$$=P\{X>-1, Y=-1\}+P\{X<1, Y=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

因 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，则 X 与 Z 不独立.

(23)【解析】(1)由 $\int_\mu^{+\infty}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$ 解得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

(2)似然函数 $L(\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，　$x_i\geq\mu, i=1,2,\cdots,n$，

$$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2，$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\Rightarrow\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2，$$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.