

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一) 试卷

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的

(1) 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ()

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$ (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

(C) $f(x) = \cos |x|$ (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

(2) 过点 $(1,0,0), (0,1,0)$, 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为 ()

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$ (B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$ (D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$ ()

(A) $\sin 1 + \cos 1$ (B) $2 \sin 1 + \cos 1$

(C) $2 \sin 1 + 2 \cos 1$ (D) $2 \sin 1 + 3 \cos 1$

(4) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx, K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 ()

(A) $M > N > K$ (B) $M > K > N$

(C) $K > M > N$ (D) $K > N > M$

(5) 下列矩阵中与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则 ()

(A) $r(A, AB) = r(A)$ (B) $r(A, BA) = r(A)$

(C) $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$ (D) $r(A, B) = r(A^T B^T)$

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$ ()

- (A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.5

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 据此样本检测:

假设: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 则 ()

- (A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0
(B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 必接受 H_0
(C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0
(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。

(9) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 则 $k =$ _____.

(10) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1, 2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 x f''(x) dx =$ _____.

(11) 设 $F(x, y, z) = xy\vec{i} - yz\vec{j} + zx\vec{k}$, 则 $\text{rot} F(1, 1, 0) =$ _____.

(12) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

(13) 设 2 阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$, 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4},$$

则 $P(C) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

(16) (本题满分 10 分)

将长为 $2m$ 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(17) (本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy.$$

(18) (本题满分 10 分)

已知微分方程 $y' + y = f(x)$,其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

(I) 若 $f(x) = x$,求方程的通解;

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,证明:方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(21) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布.

令 $Z = XY$.

(I) 求 $Cov(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一) 试卷及答案解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

(1) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是 ()

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$ (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

(C) $f(x) = \cos |x|$ (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

【答案】(D)

【解析】根据导数的定义：

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot |x|}{x} = 0$, 可导；

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin \sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot \sqrt{|x|}}{x} = 0$, 可导；

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos |x| - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = 0$, 可导；

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \sqrt{|x|}^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$, 极限不存在，

故选 D。

(2) 过点 $(1,0,0), (0,1,0)$ ，且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为 ()

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$ (B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$ (D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$

【答案】(B)

过 $(1,0,0), (0,1,0)$ 的已知曲面的切平面只有两个，显然 $z=0$ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切，排除 C、D

【解析】

曲面 $z = x^2 + y^2$ 的法向量为 $(2x, 2y, -1)$ ，

对于 A 选项， $x+y-z=1$ 的法向量为 $(1,1,-1)$ ，可得 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ ，

代入 $z = x^2 + y^2$ 和 $x+y-z=1$ 中 z 不相等，排除 A，故选 B。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = ()$

(A) $\sin 1 + \cos 1$

(B) $2\sin 1 + \cos 1$

(C) $2\sin 1 + 2\cos 1$

(D) $2\sin 1 + 3\cos 1$

【答案】(B)

【解析】
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)!} = \cos 1 + 2\sin 1$$

故选 B.

(4) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 ()

(A) $M > N > K$

(B) $M > K > N$

(C) $K > M > N$

(D) $K > N > M$

【答案】(C)

【解析】
$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{2x}{1+x^2}) dx = \pi$$

$$1+x < e^x (x \neq 0) \Rightarrow \frac{1+x}{e^x} < 1 \Rightarrow N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi < M$$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi = M$$

故 $K > M > N$, 应选 C。

(5) 下列矩阵中与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】(A)

【解析】令 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则特征值 $|\lambda E - J| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 = 0$,

则特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

当 $\lambda=1$ 时, $E - J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可知 $r(E - J) = 2$.

A选项, 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 = 0$ 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

此时当 $\lambda=1$ 时, $E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可知 $r(E - A) = 2$.

B选项, 令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则同理显然可知矩阵 B 所有的特征值为 $1, 1, 1$. 当 $\lambda=1$ 时, $r(E - B) = 1$.

C选项, 令 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则同理显然可知矩阵 C 所有的特征值为 $1, 1, 1$. 当 $\lambda=1$ 时, $r(E - C) = 1$.

D选项, 令 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则同理显然可知矩阵 D 所有的特征值为 $1, 1, 1$. 当 $\lambda=1$ 时, $r(E - D) = 1$.

由于矩阵相似, 则相关矩阵 $E - A$ 与 $E - J$ 也相似, 则 $r(E - A) = r(E - J)$.

可知答案选 A.

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则 ()

(A) $r(A, AB) = r(A)$ (B) $r(A, BA) = r(A)$

(C) $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$ (D) $r(A, B) = r(A^T B^T)$

【答案】(A)

设 $C = AB$, 则可知 C 的列向量可以由 A 的列向量线性表示, 则 $r(A, C) = r(A, AB) = r(A)$.

【解析】

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} = ()$

(A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.5

【答案】(A)

由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知, $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 故 $P\{X<0\}=P\{X>2\}$
【解析】

$$\therefore P\{X<0\}+P\{0\leq X\leq 2\}+P\{X>2\}=1, P\{0\leq X\leq 2\}=\int_0^2 f(x)dx=0.6$$

$$\therefore 2P\{X<0\}=0.4\Rightarrow P\{X<0\}=0.2$$

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 据此样本检测:

假设: $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu\neq\mu_0$, 则 ()

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 必接受 H_0

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

【答案】(A)

【解析】 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \bar{X}\sim N(\mu, \sigma^2)$, 故 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

所以 $\alpha_1=0.05$ 时, 拒绝域为: $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.025}, u_{0.025}$ 为上 α 分位点

$\alpha_2=0.001$ 时, 拒绝域为: $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.0005}$.

又因为 $u_{0.025}>u_{0.0005}$, 故选A.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。

(9) 若 $\lim_{x\rightarrow 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 则 $k=$ _____.

【答案】-2

【解析】由 $e=\lim_{x\rightarrow 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e^{\lim_{x\rightarrow 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)\frac{1}{\sin kx}}$, 得

$$1=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{1}{\sin kx}\cdot\frac{-1\tan x}{1+\tan x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{-1\tan x}{kx}=\frac{-2}{k},$$

故 $k=-2$.

(10) 设函数 $f(x)$ 具有2阶连续导数, 若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处

相切, 则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$ _____.

【答案】 $2\ln 2-2$

【解析】 $\int_0^1 xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = f'(1) - f(1) + f(0) = 2\ln 2 - 2 + 0 = 2\ln 2 - 2$

(11) 设 $F(x, y, z) = xy\vec{i} - yz\vec{j} + zx\vec{k}$, 则 $\text{rot}F(1, 1, 0) =$ _____.

【答案】 $(1, 0, -1)$

【解析】 $F(x, y, z) = xy\vec{i} - yz\vec{j} + zx\vec{k}$

$$\text{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix} = y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}$$

$$\therefore \text{rot}F(1, 1, 0) = (1, 0, -1)$$

(12) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

【答案】 0

【解析】 由曲线 L 关于 xoz 面对称, 被积函数关于 y 是奇函数, 故 $\oint_L xy ds = 0$.

(13) 设 2 阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

【答案】 -1

【解析】 由 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)$, 可知 A^2 有特征值 1, 对应的特征向量为 $\alpha_1 + \alpha_2$.

则可知 A 的特征值只能取 1 或 -1. 由于矩阵 A 有 2 个不同的特征值, 则可知 A 的特征值恰好为 1 和 -1. 则

$$|A| = 1 \times (-1) = -1.$$

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$, 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC|AB \cup C) = \frac{1}{4},$$

则 $P(C) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

$$\text{【解析】 } P\{AC|AB \cup C\} = \frac{P\{AC(AB \cup C)\}}{P(AB \cup C)} = \frac{P(AC)}{P(AB) + P(C) - P(ABC)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B) + P(C) - P(ABC)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + P(C) - 0} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}.$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分10分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

【解析】原式 $= \int \arctan \sqrt{e^x - 1} d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = \frac{1}{2}e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

再用整体代换去根号:

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t} \cdot \frac{2t}{(t^2 + 1)} dt$$
$$= \frac{2}{3}t^3 + 2t + C = \frac{2}{3}(e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{e^x - 1} + C$$

即原式 $= \frac{1}{2}e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6}(e^x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1} + C$

(16) (本题满分10分)

将长为 $2m$ 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

【解析】设圆的半径为 x , 正方形的边长为 y , 正三角形的边长为 z , 则 $2\pi x + 4y + 3z = 2$, 其面积和

$S(x, y, z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$, 即是求 $S(x, y, z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在约束条件 $2\pi x + 4y + 3z = 2$ 下的最小值是否存在.

设 $L(x, y, z, \lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$,

$$\begin{cases} L'_x = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0 \\ L'_y = 2y + 4\lambda = 0 \\ L'_z = \frac{\sqrt{3}}{2}z + 3\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{(唯一驻点). 由实际问题可知, 最小值一定存在,}$$

且在 $(\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}})$ 取得最小值, 且最小值为 $\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

(17) (本题满分10分)

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy.$$

【解析】补面: $\sum_0: x = 0, 3y^2 + 3z^2 \leq 1$ 的后侧, 则

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy \\
&= \oiint_{\Sigma + \Sigma_0} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy - \iint_{\Sigma_0} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy \\
&= \iiint_{\Omega} (1 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz - 0 \quad (\text{其中 } \Omega \text{ 为 } \Sigma \text{ 与 } \Sigma_0 \text{ 所围成的半椭球体}) \\
&= \int_0^1 dx \iint_{y^2 + z^2 \leq \frac{1-x^2}{3}} (1 + 3y^2 + 3z^2) dy dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}} (1 + 3r^2) r dr = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{3}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right) \bigg|_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}} dx \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{3 - 4x^2 + x^4}{12} dx = \frac{14\pi}{45}.
\end{aligned}$$

(18) (本题满分10分)

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数

(I) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

【解析】(I) $y = e^{-x} \left(\int x e^x dx + C \right) = C e^{-x} + x - 1$

微分方程解函数为 $y(x) = e^{-x} \left(\int_0^x f(t) e^t dt + C \right)$

$$\begin{aligned}
\text{则 } y(x+T) &= e^{-x-T} \left(\int_0^{x+T} f(t) e^t dt + C \right) \stackrel{t-T=u}{=} e^{-x-T} \left(\int_{-T}^x f(u+T) e^{u+T} du + C \right) \\
&= e^{-x} \left(\int_{-T}^x f(u) e^u du + C e^{-T} \right) = e^{-x} \left(\int_{-T}^0 f(u) e^u du + \int_0^x f(u) e^u du + C e^{-T} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{(II) 若 } e^{-x} \left(\int_{-T}^0 f(u) e^u du + \int_0^x f(u) e^u du + C e^{-T} \right) = e^{-x} \left(\int_0^x f(t) e^t dt + C \right)$$

$$\text{即 } C = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_{-T}^0 f(u) e^u du \text{ 时 } y(x+T) = y(x)$$

由于 $C = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_{-T}^0 f(u) e^u du$ 为确定常数, 故符合条件的周期解 $y(x)$ 唯一.

(19) (本题满分10分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1, 2, \dots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解析】 $x_1 > 0$, 假设 $x_k > 0$,

$$\text{由 } x > 0, e^x - 1 > x > 0 \text{ 可知 } x_{k+1} = \ln \frac{e^{x_k} - 1}{x_k} > \ln 1 = 0.$$

故数列 $\{x_n\}$ 有下界.

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}$$

令 $f(x) = xe^x - (e^x - 1)$, 则 $f'(x) = xe^x > 0$, 故 $f(x)$ 单调增加

当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 故 $0 < \frac{e^x - 1}{xe^x} < 1$, 所以 $x_{n+1} - x_n < 0$

数列 $\{x_n\}$ 单调减少

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 A , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n e^{x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{x_n} - 1)$

$Ae^A = e^A - 1$, 解得 $A = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

由 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2 = 0$, 则应有

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad \text{令 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

即 $Ax = 0$.

【解析】(I) 由 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$

可知当 $a = 2$ 时, 方程组有非零解 $x = k \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数

当 $a \neq 2$ 时, 方程组只有零解.

当 $a \neq 2$ 时, 此时显然可知二次型正定, 则此时对应的规范形为:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

当 $a = 2$ 时,

(II) 方法一: (正交变换法) 令二次型对应的实对称矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 则由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 18) = 0,$$

解得 $\lambda_1 = 5 + \sqrt{7}$, $\lambda_2 = 5 - \sqrt{7}$, $\lambda_3 = 0$.

则可知规范形为: $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2$.

方法二：（配方法）由于

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3)^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2.$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3) \\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}(x_2 + x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \text{得规范形为 } f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2.$$

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{已知 } a \text{ 是常数, 且矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \text{ 可经初等列变换化为矩阵 } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

$$\text{【解析】(I) 由于 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = 0, \text{ 则可知 } |B| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a + 2 - 1 = 0, a = 2.$$

$$\text{由 } (A:B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{(II) 解得 } p_1 = k_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = k_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = k_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故解得可逆矩阵 } P = \begin{pmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_2 \neq k_3.$$

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布.

令 $Z = XY$.

(I) 求 $Cov(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

$$Cov(X, Z) = E(XZ) - EXEZ$$

$$\text{【解析】(I) } EX = 0, EX^2 = 1, EY = \lambda \Rightarrow E(XZ) = E(X^2Y) = \lambda$$

$$Cov(X, Z) = E(XZ) - EXEZ = \lambda.$$

Z 的取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1, Y=0\}+P\{X=1, Y=0\}=\frac{1}{2}P\{Y=0\}+\frac{1}{2}P\{Y=0\}=e^{-\lambda}$$

$$(II) \quad P\{Z=k\}=P\{X=1, Y=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P\{Z=-k\}=P\{X=-1, Y=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ 其中 } k=1, 2, \dots$$

(23) (本题满分11分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 $\hat{\sigma}$ 为 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

$$\text{设 } L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}, -\infty < x_i < +\infty, \text{ 则}$$

$$\text{【解析】(I) } \ln L = \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \sigma - \frac{|x_i|}{\sigma} \right)$$

$$\therefore \text{ 令 } \frac{d \ln L}{d \sigma} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{|x_i|}{\sigma^2} \right) = 0 \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

$$E\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma$$

$$(II) \quad D\hat{\sigma} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D|X_i| = \frac{1}{n} D|X| = \frac{1}{n} (EX^2 - E^2|X|) = \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) \\ = \frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$