

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一) 试卷

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的

(1) 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则 ( )

- (A)  $ab = \frac{1}{2}$       (B)  $ab = -\frac{1}{2}$       (C)  $ab = 0$       (D)  $ab = 2$

(2) 设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(x)f'(x) > 0$  则 ( )

- (A)  $f(1) > f(-1)$       (B)  $f(1) < f(-1)$

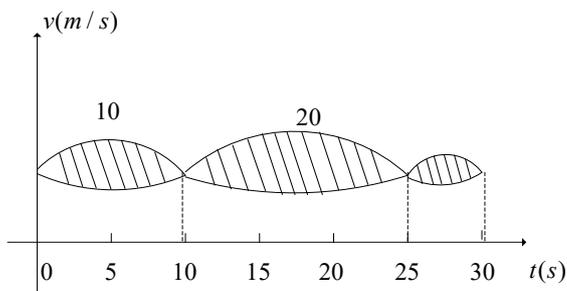
- (C)  $|f(1)| > |f(-1)|$       (D)  $|f(1)| < |f(-1)|$

(3) 函数  $f(x, y, z) = x^2y + z^2$  在点  $(1, 2, 0)$  处沿向量  $n(1, 2, 2)$  的方向导数为 ( )

- (A) 12      (B) 6      (C) 4      (D) 2

(4) 甲乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位:m) 处, 如下图中, 实线表示甲的速度曲线  $v = v_1(t)$  (单位:m/s) 虚线表示乙的速度曲线  $v = v_2(t)$ , 三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20, 3, 计时开始后乙追上甲的时刻记为  $t_0$  (单位:s), 则 ( )

- (A)  $t_0 = 10$       (B)  $15 < t_0 < 20$       (C)  $t_0 = 25$       (D)  $t_0 > 25$



(5) 设  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则 ( )

- (A)  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆      (B)  $E + \alpha\alpha^T$  不可逆

- (C)  $E + 2\alpha\alpha^T$  不可逆      (D)  $E - 2\alpha\alpha^T$  不可逆

(6) 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 则 ( )

- (A)  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  相似      (B)  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  不相似

- (C)  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  相似      (D)  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  不相似

(7) 设  $A, B$  为随机事件, 若  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 则  $P(A|B) > P(A|\bar{B})$  的充分必要条件是 ( )

- A.  $P(B|A) > P(B|\bar{A})$                       B.  $P(B|A) < P(B|\bar{A})$   
C.  $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$                       D.  $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$

(8) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  来自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则下列结论中不正确的是: ( )

- (A)  $\sum (X_i - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布                      (B)  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布  
(C)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布                      (D)  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布

**二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。**

(9) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 则  $f^{(3)}(0) =$  \_\_\_\_\_

(10) 微分方程  $y'' + 2y' + 3y = 0$  的通解为  $y =$  \_\_\_\_\_

(11) 若曲线积分  $\int_L \frac{xdx - dydy}{x^2 + y^2 - 1}$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  内与路径无关, 则  $a =$  \_\_\_\_\_

(12) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$  在区间  $(-1, 1)$  内的和函数  $S(x) =$  \_\_\_\_\_

(13) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组  $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$  的秩为

(14) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则  $EX =$

**三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(u, v)$  具有 2 阶连续偏导数,  $y = f(e^x, \cos x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

(16) (本题满分 10 分)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

(17) (本题满分 10 分)

已知函数  $y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$  确定, 求  $y(x)$  得极值

(18) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上具有 2 阶导数,  $f(1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$

证 (1) 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0,1)$  至少存在一个根;

(2) 方程  $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$  在区间  $(0,1)$  内至少存在两个不同的实根.

(19) (本题满分 10 分)

设薄片型物体  $S$  是圆锥面  $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $Z^2 = 2x$  割下的有限部分, 其上任一点弧度为  $u(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 记圆锥与柱面的交线为  $C$

(1) 求  $C$  在  $xOy$  平面上的投影曲线的方程

(2) 求  $S$  的质量  $M$

(20) (本题满分 11 分)

设三阶行列式  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有 3 个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

(1) 证明  $r(A) = 2$

(2) 如果  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  求方程组  $Ax = \beta$  的通解

(21) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准型为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$  求  $a$  的值及一个正交矩阵  $Q$ .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X, Y$  互独立, 且  $X$  的概率分布为  $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$ ,  $Y$  概率密度为  $f(y) = \begin{cases} 2y, 0 < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

(1) 求  $P\{Y \leq EY\}$  (2) 求  $Z = X + Y$  的概率密度

(23) (本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做  $n$  次测量, 该物体的质量  $\mu$  是已知的, 设  $n$  次测量结果  $x_1, x_2, \dots, x_n$  相互独立, 且均服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 该工程师记录的是  $n$  次测量的绝对误差

$z_i = |x_i - \mu|, (i = 1, 2, \dots, n)$ , 利用  $z_1, z_2, \dots, z_n$  估计  $\sigma$

(I) 求  $z_1$  的概率密度

(II) 利用一阶矩求  $\sigma$  的矩估计量

(III) 求  $\sigma$  的最大似然估计量

## 2017 年考研数学一真题及答案解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续，则 ( )

- (A)  $ab = \frac{1}{2}$                       (B)  $ab = -\frac{1}{2}$   
(C)  $ab = 0$                       (D)  $ab = 2$

【答案】A

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{ax} = \frac{1}{2a}$ ,  $\because f(x)$  在  $x = 0$  处连续  $\therefore \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$ . 选 A.

(2) 设函数  $f(x)$  可导，且  $f(x)f'(x) > 0$ ，则 ( )

- (A)  $f(1) > f(-1)$       (B)  $f(1) < f(-1)$   
(C)  $|f(1)| > |f(-1)|$       (D)  $|f(1)| < |f(-1)|$

【答案】C

【解析】 $\because f(x)f'(x) > 0$ ,  $\therefore \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$  (1) 或  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$  (2), 只有 C 选项满足 (1) 且满足 (2), 所以选 C.

(3) 函数  $f(x, y, z) = x^2y + z^2$  在点  $(1, 2, 0)$  处沿向量  $u = (1, 2, 2)$  的方向导数为 ( )

- (A) 12      (B) 6      (C) 4      (D) 2

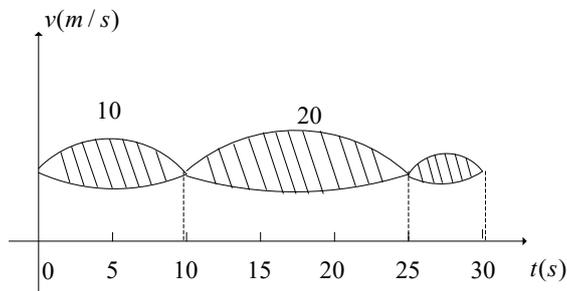
【答案】D

【解析】 $gradf = \{2xy, x^2, 2z\}$ ,  $\Rightarrow gradf|_{(1,2,0)} = \{4, 1, 0\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = gradf \cdot \frac{u}{|u|} = \{4, 1, 0\} \cdot \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\} = 2$ .

选 D.

(4) 甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10 (单位: m) 处，图中实线表示甲的速度曲线  $v = v_1(t)$

(单位:  $m/s$ ), 虚线表示乙的速度曲线  $v = v_2(t)$ , 三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20, 3, 计时开始后乙追上甲的时刻记为  $t_0$  (单位:  $s$ ), 则 ( )



- (A)  $t_0 = 10$     (B)  $15 < t_0 < 20$     (C)  $t_0 = 25$     (D)  $t_0 > 25$

【答案】B

【解析】从 0 到  $t_0$  这段时间内甲乙的位移分别为  $\int_0^{t_0} v_1(t)dt, \int_0^{t_0} v_2(t)dt$ , 则乙要追上甲, 则  $\int_0^{t_0} v_2(t) - v_1(t)dt = 10$ , 当  $t_0 = 25$  时满足, 故选 C.

(5) 设  $\alpha$  是  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则 ( )

- (A)  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆    (B)  $E + \alpha\alpha^T$  不可逆  
(C)  $E + 2\alpha\alpha^T$  不可逆    (D)  $E - 2\alpha\alpha^T$  不可逆

【答案】A

【解析】选项 A, 由  $(E - \alpha\alpha^T)\alpha = \alpha - \alpha = 0$  得  $(E - \alpha\alpha^T)x = 0$  有非零解, 故  $|E - \alpha\alpha^T| = 0$ . 即  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆. 选项 B, 由  $r(\alpha\alpha^T)\alpha = 1$  得  $\alpha\alpha^T$  的特征值为  $n-1$  个 0, 1. 故  $E + \alpha\alpha^T$  的特征值为  $n-1$  个 1, 2. 故可逆. 其它选项类似理解.

(6) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 则 ( )

- (A)  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  相似    (B)  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  不相似  
(C)  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  相似    (D)  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  不相似

【答案】B

【解析】由  $(\lambda E - A) = 0$  可知 A 的特征值为 2,2,1

因为  $3 - r(2E - A) = 1$ ,  $\therefore$  A 可相似对角化, 且  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由  $|\lambda E - B| = 0$  可知 B 特征值为 2,2,1.

因为  $3 - r(2E - B) = 2$ ,  $\therefore$  B 不可相似对角化, 显然 C 可相似对角化,

$\therefore A \sim C$ , 且 B 不相似于 C

(7) 设 A, B 为随机概率, 若  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 则  $P(A|B) > P(A|\bar{B})$  的充分必要条件是 ( )

(A)  $P(B|A) > P(B|\bar{A})$       (B)  $P(B|A) < P(B|\bar{A})$

(C)  $P(\bar{B}|A) > P(\bar{B}|\bar{A})$       (D)  $P(\bar{B}|A) < P(\bar{B}|\bar{A})$

【答案】A

【解析】按照条件概率定义展开, 则 A 选项符合题意。

(8) 设  $X_1, X_2 \cdots X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则下列结论中不正确的是 ( )

(A)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布      (B)  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布

(C)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布      (D)  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布

【答案】B

【解析】

$$X \sim N(\mu, 1), X_i - \mu \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n), A \text{ 正确}$$

$$\Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1), C \text{ 正确},$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}), \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0, 1), n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1), D \text{ 正确},$$

$$\Rightarrow \sim N(0, 2), \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1), \text{ 故 B 错误.}$$

由于找不正确的结论，故 B 符合题意。

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，则  $f^{(3)}(0) =$  \_\_\_\_\_

【答案】  $f(0) = -6$

【解析】

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3} \Rightarrow f'''(0) = 0$$

(10) 微分方程  $y'' + 2y' + 3y = 0$  的通解为  $y =$  \_\_\_\_\_

【答案】  $y = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x)$ ，( $c_1, c_2$  为任意常数)

【解析】 齐次特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 + \sqrt{2}i$

故通解为  $e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x)$

(11) 若曲线积分  $\int_L \frac{xdx - aydy}{x^2 + y^2 - 1}$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  内与路径无关，则

$a =$  \_\_\_\_\_

【答案】  $a = 1$

【解析】  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$ ， $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2axy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$ ，由积分与路径无关知  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow a = -1$

(12) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$  在区间  $(-1, 1)$  内的和函数  $S(x) =$  \_\_\_\_\_

【答案】  $s(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

【解析】  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)' = \left( \frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$

(13) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的 3 维列向量组，则向量组  $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$  的秩为

【答案】2

【解析】由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 可知矩阵  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  可逆, 故

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = r(A) \text{ 再由 } r(A) = 2 \text{ 得 } r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = 2$$

(14) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则  $EX =$  \_\_\_\_\_

【答案】2

【解析】  $F'(x) = 0.5\varphi(x) + \frac{0.5}{2}\varphi(\frac{x-4}{2})$ , 故  $EX = 0.5\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + \frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$   
 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = EX = 0$ . 令  $\frac{x-4}{2} = t$ , 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(\frac{x-4}{2})dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} (4+2t)\varphi(t)dt = 8 \cdot 1 + 4\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt = 8$

因此  $E(X) = 2$ .

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(u, v)$  具有 2 阶连续偏导数,  $y = f(e^x, \cos x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

【答案】  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = f'_1(1, 1), \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = f''_{11}(1, 1)$ ,

【解析】

$$y = f(e^x, \cos x) \Big|_{x=0} \Rightarrow y(0) = f(1, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = (f'_1 e^x + f'_2 (-\sin x))\Big|_{x=0} = f'_1(1, 1) \cdot 1 + f'_2(1, 1) \cdot 0 = f'_1(1, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = f''_{11}e^{2x} + f''_{12}e^x(-\sin x) + f''_{21}e^x(-\sin x) + f''_{22}\sin^2 x + f'_1 e^x - f'_2 \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = f''_{11}(1, 1) + f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1)$$

结论:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = f'_1(1, 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = f''_{11}(1, 1) + f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1)$$

(16) (本题满分 10 分) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

【答案】  $\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2 = \frac{1}{2} (\ln(1+x) \cdot x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx) = \frac{1}{4}$$

(17) (本题满分 10 分)

已知函数  $y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$  确定, 求  $y(x)$  的极值

【答案】 极大值为  $y(1) = 1$ , 极小值为  $y(-1) = 0$

【解析】

两边求导得:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 3y' = 0 \quad (1)$$

令  $y' = 0$  得  $x = \pm 1$

$$\text{对 (1) 式两边关于 } x \text{ 求导得} \quad 6x + 6y(y')^2 + 3y^2 y'' + 3y'' = 0 \quad (2)$$

将  $x = \pm 1$  代入原题给的等式中, 得  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  or  $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ ,

将  $x=1, y=1$  代入 (2) 得  $y''(1) = -1 < 0$

将  $x=-1, y=0$  代入 (2) 得  $y''(-1) = 2 > 0$

故  $x=1$  为极大值点,  $y(1) = 1$ ;  $x=-1$  为极小值点,  $y(-1) = 0$

(18) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有 2 阶导数, 且  $f(1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ , 证明:

(I) 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在一个实根;

(II) 方程  $f(x)f'(x) + (f'(x))^2 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

(I)  $f(x)$  二阶导数,  $f(1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$

解: 1) 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ , 根据极限的保号性得

$\exists \delta > 0, \forall x \in (0, \delta)$  有  $\frac{f(x)}{x} < 0$ , 即  $f(x) < 0$

进而  $\exists x_0 \in (0, \delta)$  有  $f(x_0) < 0$

又由于  $f(x)$  二阶可导, 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上必连续

那么  $f(x)$  在  $[\delta, 1]$  上连续, 由  $f(\delta) < 0, f(1) > 0$  根据零点定理得:

至少存在一点  $\xi \in (\delta, 1)$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 即得证

(II) 由 (1) 可知  $f(0) = 0, \exists \xi \in (0, 1)$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 令  $F(x) = f(x)f'(x)$ , 则  $f(0) = f(\xi) = 0$

由罗尔定理  $\exists \eta \in (0, \xi)$ , 使  $f'(\eta) = 0$ , 则  $F(0) = F(\eta) = F(\xi) = 0$ ,

对  $F(x)$  在  $(0, \eta), (\eta, \xi)$  分别使用罗尔定理:

$\exists \eta_1 \in (0, \eta), \eta_2 \in (\eta, \xi)$  且  $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1), \eta_1 \neq \eta_2$ , 使得  $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$ , 即

$F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$  在  $(0, 1)$  至少有两个不同实根。

得证。

(19) (本题满分 10 分)

设薄片型物体  $S$  是圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  割下的有限部分, 其上任一点的密度为

$\mu = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。记圆锥面与柱面的交线为  $C$

(I) 求  $C$  在  $xOy$  平面上的投影曲线的方程;

(II) 求  $S$  的  $M$  质量。

【答案】 64

【解析】

(1) 由题设条件知,  $C$  的方程为  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$

则  $C$  在  $xoy$  平面的方程为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$

(2)

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_S \mu(x, y, z) dS = \iint_S 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS = \iint_{D: x^2 + y^2 \leq 2x} 9\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dx dy \\
 &= 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = 64
 \end{aligned}$$

(20) (本题满分 11 分) 设 3 阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有 3 个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

(I) 证明  $r(A) = 2$ ;

(II) 若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求方程组  $Ax = \beta$  的通解。

**【答案】** (I) 略; (II) 通解为  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$

**【解析】**

(I) 证明: 由  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$  可得  $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ , 即  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关,

因此,  $|A| = |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3| = 0$ , 即  $A$  的特征值必有 0。

又因为  $A$  有三个不同的特征值, 则三个特征值中只有 1 个 0, 另外两个非 0。

且由于  $A$  必可相似对角化, 则可设其对角矩阵为  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

$$\therefore r(A) = r(\Lambda) = 2$$

(II) 由 (1)  $r(A) = 2$ , 知  $3 - r(A) = 1$ , 即  $Ax = 0$  的基础解系只有 1 个解向量,

由  $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$  可得  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ , 则  $Ax = 0$  的基础解系为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

又  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 即  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$ , 则  $Ax = \beta$  的一个特解为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

综上,  $Ax = \beta$  的通解为  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$

(21) (本题满分 11 分) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$

在正交变换  $X = QY$  下的标准型  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 求  $a$  的值及一个正交矩阵  $Q$

【答案】  $a = 2; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, f \underline{\underline{x=Qy}} -3y_1^2 + 6y_2^2$

【解析】

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$$

由于  $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$  经正交变换后, 得到的标准形为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ ,

$$\text{故 } r(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 2,$$

将  $a = 2$  代入, 满足  $r(A) = 2$ , 因此  $a = 2$  符合题意, 此时  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 6,$$

由  $(-3E - A)x = 0$ , 可得  $A$  的属于特征值 -3 的特征向量为  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

由  $(6E - A)x = 0$ , 可得  $A$  的属于特征值 6 的特征向量为  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

由  $(0E - A)x = 0$ , 可得  $A$  的属于特征值 0 的特征向量为  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ , 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  彼此正交, 故只需单位化即可:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, ,$$

$$\text{则 } Q = (\beta_1 \beta_2 \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f \stackrel{x=Qy}{=} -3y_1^2 + 6y_2^2$$

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且  $X$  的概率分布为  $P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{2}$ ,  $Y$

的概率密度为  $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(I) 求  $P(Y \leq EY)$

(II) 求  $Z = X + Y$  的概率密度。

$$\text{【答案】 (I) } P\{Y \leq EY\} = \frac{4}{9}; \text{ (II) } f_z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ z-2, & 2 < z < 3 \end{cases}$$

【解析】

$$\text{(I) } E(Y) = \int_0^1 y \cdot 2y dy = \frac{2}{3}$$

$$P(Y \leq EY) = P(Y \leq \frac{2}{3}) = \int_0^{\frac{2}{3}} 2y dy = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } F_z(Z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(X + Y \leq z, X = 0) + P(X + Y \leq z, X = 2) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq z - 2, X = 2) \\ &= \frac{1}{2} P(Y \leq z) + \frac{1}{2} P(Y \leq z - 2) \end{aligned}$$

(1) 当  $z < 0, z - 2 < 0$ , 而  $z < 0$ , 则  $F_z(Z) = 0$

(2) 当  $z-2 \geq 1, z > 1$ , 即  $z \geq 3$  时,  $F_z(Z) = 1$

(3) 当  $0 \leq z < 1$  时,  $F_z(Z) = \frac{1}{2}z^2$

(4) 当  $1 \leq z < 2$  时,  $F_z(Z) = \frac{1}{2}$

(5) 当  $2 \leq z < 3$  时,  $F_z(Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-2)^2$

$$\text{所以综上所述 } F_z(Z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}z^2, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-2)^2, & 2 \leq z < 3 \\ 1, & z \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{所以 } f_z(Z) = [F_z(Z)]' = \begin{cases} z & 0 < z < 1 \\ z-2 & 2 < z < 3 \end{cases}$$

(23) (本题满分 11 分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做  $n$  次测量, 该物体的质量  $\mu$  是已知的, 设  $n$  次测量结果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且均服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ 。该工程师记录的是  $n$  次测量的绝对误差  $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$ , 利用  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  估计  $\sigma$ 。

(I) 求  $Z_i$  的概率密度;

(II) 利用一阶矩求  $\sigma$  的矩估计量

【答案】

$$(I) f_{Z_i}(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(II) \text{矩估计 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|;$$

$$(III) \text{最大似然估计: } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$$

【解析】(I)  $F_{Z_i}(z) = P(Z_i \leq z) = P(|X_i - \mu| \leq z)$

当  $z < 0, F_{z_i}(z) = 0$

当  $z \geq 0, F_{z_i}(z) = P(-z \leq X_i - \mu \leq z) = P(\mu - z \leq X_i \leq \mu + z) = F_X(\mu + z) - F(\mu - z)$

当  $z \geq 0$  时,

$$\therefore f_{z_i}(z) = (F_{z_i}(z))' = f_x(\mu + z) + f_x(\mu - z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{综上 } f_{z_i}(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) E(Z_i) &= \int_0^{+\infty} z \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz^2 \\ &= \frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \end{aligned}$$

$$\text{令 } E(Z_i) = \bar{Z} \quad \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

$$\text{由此可得 } \sigma \text{ 的矩估计量 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

对总体  $X$  的  $n$  个样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 则相交的绝对误差的样本  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, Z_i = |x_i - u|, i = 1, 2, \dots, n$ , 令其样

本值为  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, Z_i = |x_i - u|$

$$\text{则对应的似然函数 } L(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{2\sigma^2}}, & Z_1, Z_2, \dots, Z_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

两边取对数, 当  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n > 0$  时

$$\ln L(\sigma) = n \ln \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n Z_i^2 = 0$$

所以,  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - u)^2}$  为所求的最大似然估计。