

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.  $x \rightarrow 0^+$  时，下列无穷小量中最高阶是 ( )

A.  $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

B.  $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

C.  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D.  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2} dt$

2. 设函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内有定义，且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 则 ( )

A. 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ ,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

B. 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$ ,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

C. 当  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ .

D. 当  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$ .

3. 设函数  $f(x)$  在点  $(0, 0)$  处可微,  $f(0, 0) = 0$ ,  $n = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \bigg|_{(0,0)}$  非零向量  $d$  与  $n$  重

直, 则 ( )

A.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在

B.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在

C.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|d \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在

D.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|d \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

4. 设  $R$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径,  $r$  是实数, 则 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  发散时,  $|r| \geq R$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  发散时,  $|r| \leq R$

C.  $|r| \geq R$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  发散

D.  $|r| \leq R$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  发散

5. 若矩阵  $A$  经初等变换化成  $B$ , 则 ( )

A. 存在矩阵  $P$ , 使得  $PA=B$

B. 存在矩阵  $P$ , 使得  $BP=A$

C. 存在矩阵  $P$ , 使得  $PB=A$

D. 方程组  $Ax=0$  与  $Bx=0$  同解

6. 已知直线  $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{2-c_2}{c_1}$

与直线  $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{2-c_3}{c_2}$  相交于一点, 法向量  $a_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i=1, 2, 3$ . 则

A.  $a_1$  可由  $a_2, a_3$  线性表示

B.  $a_2$  可由  $a_1, a_3$  线性表示

C.  $a_3$  可由  $a_1, a_2$  线性表示

D.  $a_1, a_2, a_3$  线性无关

7. 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0 \quad P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}, \text{ 则 } A, B, C \text{ 中恰有一个事}$$

件发生的概率为

- A.  $\frac{3}{4}$   
 B.  $\frac{2}{3}$   
 C.  $\frac{1}{2}$   
 D.  $\frac{5}{12}$

8. 设  $x_1, x_2, \dots, x_{(n)}$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 其中  $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}, \Phi(x)$

表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得  $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right)$  的近似值为

- A.  $1-\Phi(1)$   
 B.  $\Phi(1)$   
 C.  $1-\Phi(0, 2)$   
 D.  $\Phi(0, 2)$

二、填空题: 9—14 小题, 每小题 2 分, 共 24 分。请将解答写在答题纸指定位置上。

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] =$

10. 设  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} =$

11. 若函数  $f(x)$  满足  $f'(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$ , 且  $f(0) = m, f'(0) = n$ , 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx =$$

12. 设函数  $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$ , 则  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} =$

13. 行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$

14. 设  $x$  服从区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  上的均匀分布,  $Y = \sin X$ , 则  $Cov(X, Y =$

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$  的最大值

16. (本题满分 10 分)

计算曲线积分  $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$  其中  $L$  是  $x^2 + y^2 = 2$ , 方向为逆时针方向

17. (本题满分 10 分)

设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, (x+1)a_n + 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_{n+1}$ , 证明: 当  $|x| < 1$  时幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  收敛,

并求其和函数.

18. (本题满分 10 分)

设  $\Sigma$  为由面  $Z: \sqrt{x^2+y^2} \left( |x^2+y^2| \leq 4 \right)$  的下侧,  $f(x)$  是连续函数, 计算  $I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2 - y] dydz + [yf(xy) + 2y + x] dzdx + [2f(xy) + 2] dxdy$

19. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上具有连续导数,  $f(0) = f(2) = 0, M = \max_{x \in (0, 2)} \{|f(x)|\}$ , 证明

(1), 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $|f'(\xi)| \geq M$  (2) 若对任意的  $x \in (0, 2), |f'(x)| \leq M$ , 则  $M = 0$ .

20. 设二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$  经正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$ , 其中  $a \geq b$ .

(1) 求  $a, b$  的值.

(2) 求正交矩阵  $Q$ .

21. 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $P = (\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  是非零向量且不是  $A$  的特征向量.

(1) 证明  $P$  为可逆矩阵

(2) 若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$ , 并判断  $A$  是否相似于对角矩阵.

22. 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 其中  $X_1$  与  $X_2$  均服从标准正态分布,  $X_3$  的概率分布为  $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$ ,  $Y = X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2$ .

(1) 求二维随机变量  $(X_1, Y)$  的分布函数, 结果用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示.

(2) 证明随机变量  $Y$  服从标准正态分布.

23. 设某种元件的使用寿命  $T$  的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^m}{\theta}}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中  $\theta, m$  为参数且大于零.

(1) 求概率  $P\{T > t\}$  与  $P\{T > S + t | T > S\}$ , 其中  $S > 0, t > 0$ .

(2) 任取  $n$  个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 若  $m$  已知, 求

$\theta$  的最大似然估计值  $\hat{\theta}$ .

## 2020 全国硕士研究生入学统一考试数学一试题详解

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当  $x \rightarrow 0^+$  时，下列无穷小量中最高阶是 ( )

(A)  $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$  (B)  $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^2}) dt$

(C)  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$  (D)  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2} dt$

【答案】(D)

【解析】由于选项都是变限积分，所以导数的无穷小量的阶数比较与函数的比较是相同的。

$$(A) \left( \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt \right)' = e^{x^2} - 1 \sim x^2$$

$$(B) \left( \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^2}) dt \right)' = \ln(1 + \sqrt{x^2}) \sim |x|$$

$$(C) \left( \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \right)' = \sin(\sin^2 x) \sim x^2$$

$$(D) \left( \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2} dt \right)' = \sqrt{\sin(1-\cos x)^2} \sin x \sim \frac{1}{2} x^3$$

经比较，选 (D)

(2) 设函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内有定义，且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则 ( )

(A) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$  时， $f(x)$  在  $x=0$  处可导。

(B) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$  时， $f(x)$  在  $x=0$  处可导。

(C) 当  $f(x)$  在  $x=0$  处可导时， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 。

(D) 当  $f(x)$  在  $x=0$  处可导时， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$

【答案】(C)

【解析】当  $f(x)$  在  $x=0$  处可导，且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则有  $f(0) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  ( $f(x)$ )

为  $x$  的高阶无穷小量), 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ , 选 (C)。

(3) 设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微,  $f(0, 0) = 0, \vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$ , 非零向量  $\vec{\alpha}$  与  $\vec{n}$

垂直, 则 ( )

- (A)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在
- (B)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在
- (C)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{\alpha} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在
- (D)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  存在

【答案】 (A)

【解析】由题意可知,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|(f'_x(0,0), f'_y(0,0), -1) \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0,0) - f'_x(0,0)(x-0) - f'_y(0,0)(y-0)|}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}}, \end{aligned}$$

由于函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微, 所以  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\vec{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ , 选 (A)。

(4) 设  $R$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径,  $r$  是实数, 则 ( )

- (A) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散时,  $|r| \geq R$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散时,  $|r| \leq R$
- (C) 当  $|r| \geq R$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散 (D) 当  $|r| \leq R$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  收敛

【答案】 (A)

【解析】因为  $R$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径, 所以  $\sqrt{R}$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  的收敛半径,

当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散时, 由阿贝尔定理得  $|r| \geq R$ , 选 (A)。

(5) 若矩阵  $A$  经初等变换化成  $B$ , 则 ( )

(A) 存在矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$

(B) 存在矩阵  $P$ , 使得  $BP = A$

(C) 存在矩阵  $P$ , 使得  $PB = A$

(D) 方程组  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解

【答案】(B)

【解析】由题意可知, 对于矩阵  $A$  进行列变换得到矩阵  $B$ , 则存在初等矩阵  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ ,

使  $AQ_1Q_2 \cdots Q_t = B$ , 则  $A = B(Q_1Q_2 \cdots Q_t)^{-1}$ , 即  $A = BP$ , 选 (B)。

(6) 已知直线  $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$  与直线  $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$  相交与一

点, 法向量  $\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i=1,2,3$ , 则 ( )

(A)  $a_1$  可由  $a_2, a_3$  线性表示

(B)  $a_2$  可由  $a_1, a_3$  线性表示

(C)  $a_3$  可由  $a_1, a_2$  线性表示

(D)  $a_1, a_2, a_3$  线性无关

【答案】(C)

【解析】设交点为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 则

$$\frac{x_0 - a_2}{a_1} = \frac{y_0 - b_2}{b_1} = \frac{z_0 - c_2}{c_1} = k, \quad \frac{x_0 - a_3}{a_2} = \frac{y_0 - b_3}{b_2} = \frac{z_0 - c_3}{c_2} = l,$$

所以  $x_0 = a_1k + a_2 = a_2l + a_3; y_0 = b_1k + b_2 = b_2l + b_3; z_0 = c_1k + c_2 = c_2l + c_3$ ,

从而有  $\alpha_3 = k\alpha_1 + (1-l)\alpha_2$ , 选 (C)。

(7) 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0$ ,

$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ , 则  $A, B, C$  中恰有一个事件发生的概率为 ( )

(A)  $\frac{3}{4}$

(B)  $\frac{2}{3}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D)  $\frac{5}{12}$

【答案】 (D)

【解析】 设  $A, B, C$  中恰有一个事件发生的概率为  $p$ , 则

$$p = P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}), \quad ABC \subset AB, P(AB) = 0 \Rightarrow P(ABC) = 0,$$

$$P(\overline{A}\overline{B}C) = P(\overline{AB \cup C}) = P(A) - P(A(B \cup C))$$

$$= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(\overline{A}B\overline{C}) = P(\overline{BA \cup C}) = P(B) - P(B(A \cup C))$$

$$= P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(A\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{CA \cup B}) = P(C) - P(C(A \cup B))$$

$$= P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{1}{4} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12};$$

$$\text{代入, 可得 } p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

(8) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 其中  $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$ ,

$\Phi(x)$  表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得  $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\}$  的近似值为( )。

(A)  $1 - \Phi(1)$

(B)  $\Phi(1)$

(C)  $1 - \Phi(0.2)$

(D)  $\Phi(0.2)$

【答案】 (B)

【解析】 由题意可知,  $E(X) = \frac{1}{2}$ ,  $D(X) = \frac{1}{4}$ ,  $E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ ,

$$D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100 \times \frac{1}{4} = 25,$$

利用中心极限定理可得  $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\} \approx P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \leq \frac{55 - 50}{\sqrt{25}}\right\} = \Phi(1)$ 。选 (B)

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $-1$

【解析】 由题意可知,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^x + 1}{(e^x - 1)\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$(10) \text{ 设 } \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $-\sqrt{2}$

$$\text{【解析】 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} = -\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} = -\sqrt{2}$$

(11) 若函数  $f(x)$  满足  $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$ , 且  $f(0) = m, f'(0) = n$ , 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $n + am$

【解析】 由题意可知, 特征方程为  $r^2 + ar + 1 = 0$ ,  $\Delta = \sqrt{a^2 - 4}$ , 因为  $a > 0$ , 所以进行如下讨论:

1) 当  $a > 2$  时, 方程有两个负实根, 即  $f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ,  $C_1, C_2$  为任意的常数, 此时,

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} (f''(x) + af'(x))dx = -(f'(x) + af(x))\Big|_0^{+\infty} = n + am;$$

2) 当  $0 < a < 2$  时, 方程有共轭复根,

$$\text{即 } f(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x \right), C_1, C_2 \text{ 为任意的常数, 此时,}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} (f''(x) + af'(x))dx = -(f'(x) + af(x))\Big|_0^{+\infty} = n + am;$$

3) 当  $a = 2$  时, 方程有两个相等的负实根, 即  $f(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ ,  $C_1, C_2$  为任意的常数, 此时,

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} (f''(x) + af'(x))dx = -(f'(x) + af(x))\Big|_0^{+\infty} = n + am;$$

$$\text{故 } \int_0^{+\infty} f(x)dx = n + am$$

$$(12) \text{ 设函数 } f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt, \text{ 则 } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $4e$

$$\text{【解析】 由题意可知, } f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt, \text{ 令 } xt^2 = u, \text{ 得 } f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{x^3y^2} \frac{1}{\sqrt{u}} e^u du,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \int_0^{x^3y^2} \frac{1}{\sqrt{u}} e^u du + \frac{3}{2}ye^{x^3y^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}e^{x^3y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3y^2}} \cdot 2x^3y + \frac{3}{2}e^{x^3y^2} + \frac{3}{2}ye^{x^3y^2} \cdot 2x^3y, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 4e.$$

$$(13) \text{ 行列式 } \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $a^4 - 4a^2$

【解析】

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$= -a \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ a & 2a \end{vmatrix} - 2a \begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -a(2a - a^3) - 2a^2$$

$$= a^4 - 4a^2$$

(14) 设  $X$  服从区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  的均匀分布,  $Y = \sin X$ , 则  $\text{Cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\frac{2}{\pi}$

【解析】由题意可知,  $E(X) = 0$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

则  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, \sin X) = E(X \sin X) - E(X)E(\sin X)$ ,

其中  $E(X \sin X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}$ ,

故  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, \sin X) = E(X \sin X) - E(X)E(\sin X) = \frac{2}{\pi}$ .

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 求  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$  极值

【答案】极小值为  $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$

【解析】由题意可知,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x$ ;

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{1}{6} \\ y_2 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

再有  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y$ , 得

$$A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 0, B_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = -1, C_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = 0;$$

$$A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})} = 1, B_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \bigg|_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})} = -1, C_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \bigg|_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})} = 4$$

因为  $A_1 C_1 - B_1^2 = -1 < 0$ ,  $A_2 C_2 - B_2^2 = 3 > 0$ , 且  $A_2 = 1 > 0$ , 所以  $(0, 0)$  不是极值点,  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$  为极小值点, 极小值为  $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$ .

(16) (本题满分 10 分) 计算曲线积分  $I = \int \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$ , 其中  $I$  是曲线

$L: x^2 + y^2 = 2$ , 方向为逆时针方向。

【答案】  $\pi$

【解析】由题意可知, 补线  $L_1: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon > 0$ , 且任意小, 方向是顺时针,

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \int_{L+L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy \\ &= \iint_D \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy - \int_{L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L_1} (4x-y)dx + (x+y)dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D'} 2dxdy = \pi. \end{aligned}$$

(17) (本题满分 10 分) 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $(n+1)a_{n+1} = (n+\frac{1}{2})a_n$ , 证明: 当  $|x| < 1$

时, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  收敛, 并求其和函数。

【答案】  $S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2$

【解析】由题意可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} \right| |x| = |x| < 1$ , 故当  $|x| < 1$  时, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

收敛。因为  $a_1 = 1$ ,  $(n+1)a_{n+1} = (n+\frac{1}{2})a_n$ , 所以  $a_0 = 2$ 。

令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , 则

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2}x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2}x^n + a_0, \\
&= xS'(x) + \frac{1}{2}S(x) + 1
\end{aligned}$$

即  $(x-1)S'(x) + \frac{1}{2}S(x) = -1$ ，解微分方程，得  $S(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x}} - 2$ 。

由  $S(0) = 0$ ，得  $C = 2$ ，故  $S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2$ 。

(18) 设  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ) 的下侧， $f(x)$  是连续函数，计算

$$I = \iint_{\Sigma} (xf(xy) + 2x - y)dydz + (yf(xy) + 2y + x)dzdx + (zf(xy) + z)dx dy.$$

【答案】  $\frac{14}{3}\pi$

【解析】由题意可知，

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} (xf(xy) + 2x - y)dydz + (yf(xy) + 2y + x)dzdx + (zf(xy) + z)dx dy \\
&= - \iint_D \left[ (xf(xy) + 2x - y) \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + (yf(xy) + 2y + x) \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + (f(xy) + 1)\sqrt{x^2 + y^2} \right] dx dy \\
&= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{14}{3}\pi
\end{aligned}$$

(19) (本题满分 10 分)  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上具有连续导数， $f(0) = f(2) = 0$ ，

$M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$ ，证明

(1)  $\exists \xi \in [0, 2]$ ，使得  $|f'(\xi)| \geq M$ ；

(2) 若  $\forall x \in [0, 2]$ ， $|f'(x)| \leq M$ ，则  $M = 0$ 。

【证明】(I) 由题设， $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续，且  $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$ 。若  $M = 0$ ，则结论必成立。

若  $M > 0$ ，则  $\exists x_0 \in (0, 2)$ ，使  $|f(x_0)| = M$ 。

若  $0 < x_0 \leq 1$ ，由拉格朗日中值定理，可得

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \right| = \frac{|f(x_0)|}{x_0} = \frac{M}{x_0} \geq M, \xi \in (0, x_0) \subset (0, 2).$$

若  $1 < x_0 < 2$ , 由拉格朗日中值定理, 可得

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \right| = \frac{|f(x_0)|}{2 - x_0} = \frac{M}{2 - x_0} > M, \xi \in (x_0, 2) \subset (0, 2).$$

(II) 根据第一问,  $\exists x_0 \in (0, 2)$ , 使  $|f(x_0)| = M$ , 则

$$M = |f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = \left| \int_0^{x_0} f'(x) dx \right| \leq \int_0^{x_0} |f'(x)| dx \leq \int_0^{x_0} M dx = Mx_0, (1)$$

$$M = |f(x_0)| = |f(2) - f(x_0)| = \left| \int_{x_0}^2 f'(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^2 |f'(x)| dx \leq \int_{x_0}^2 M dx = M(2 - x_0), (2)$$

由式 (1) 则  $M(x_0 - 1) \geq 0$ , 由式 (2) 则  $M(x_0 - 1) \leq 0$ . 显然若  $x_0 \neq 1$ , 则  $M = 0$ .

若  $x_0 = 1$ , 且  $|f'(x)| \leq M$ , 则

$$M = |f(1)| = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq M$$

$$M = |f(1)| = |f(2) - f(1)| = \left| \int_1^2 f'(x) dx \right| \leq \int_1^2 |f'(x)| dx \leq M$$

故  $|f'(x)| \equiv M, x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ , 即  $f'(x) = \pm M$ . 若  $M \neq 0$ , 则  $f'(x)$  不连续, 这与题设矛盾, 故  $M = 0$ .

(20) (本题满分 11 分) 设二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$  经正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

化为二次型  $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$ , 其中  $a \geq b$ .

(1) 求  $a, b$  值;

(2) 求正交矩阵  $Q$ .

【答案】 (1)  $a = 4, b = 1$ , (2)  $Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

【解析】 (1)  $f(x_1, x_2) = x^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x = x^T A x$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$f(y_1, y_2) = y^T \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix} y = y^T B y, \quad B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2) \xrightarrow{x=Qy} g(y_1, y_2)$ , 即  $Q^T A Q = B$ , 其中  $Q$  为正交矩阵, 故  $A, B$  合同且相似,

$$\left. \begin{array}{l} |B|=0 \Rightarrow ab-4=0 \\ \text{则 } \lambda_A=\lambda_B. \text{ 又因 } A \text{ 的特征值为 } 5 \text{ 和 } 0, \text{ 则由 } tr(A)=tr(B) \Rightarrow a+b=5 \\ a \geq b \end{array} \right\} \Rightarrow a=4, b=1,$$

(2) 当  $\lambda_A=5$  时, 其线性无关的特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , 当  $\lambda_A=0$  时, 其线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 令 } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} 5 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

当  $\lambda_B=5$  时, 其线性无关的特征向量为  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_B=0$  时, 其线性无关的特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

$$\text{令 } P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } Q_1^T A Q_1 = Q_2^T B Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & \\ & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_2 Q_1^T A Q_1 Q_2^T = B \Rightarrow Q = Q_1 Q_2^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

(21) (本题满分 11 分) 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $P(\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  是非零向量且不是  $A$  的特征向量

(1) 证明  $P$  为可逆矩阵;

(2) 若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$ , 并判断  $A$  是否相似于对角矩阵。

【答案】(2)  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A$  可以相似对角化

【解析】(1) 证明: 设  $k_1\alpha + k_2A\alpha = 0$  ①,  $k_2$  肯定为 0, 反证法, 若  $k_2 \neq 0$ , 则  $A\alpha = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$ ,

即  $\alpha$  为  $A$  的特征向量, 与题意矛盾. 因此  $k_2 = 0$ , 代入①得  $k_1\alpha = 0$ , 由  $\alpha$  非零得  $k_1 = 0$ .

由  $k_1 = k_2 = 0$  得  $\alpha, A\alpha$  线性无关, 向量组秩为 2,  $r(P) = 2$ , 所以  $P = (\alpha, A\alpha)$  可逆.

(2) 由  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$  得  $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$ ,

$$A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

由  $P$  可逆得  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 令  $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  由  $|B - \lambda E| = 0$  得  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

有两个不同的特征值, 所以  $B$  可相似于对角矩阵, 由  $P^{-1}AP = B$ ,  $A \sim B$

因为  $B$  可对角化,  $A$  相似于  $B$ , 所以  $A$  可对角化, 即  $A$  相似于对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 其中  $X_1, X_2$  均服从标准正态分布,  $X_3$  的概率分布与  $P\{X_2 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$

(1) 求二维随机变量的分布函数, 结果用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示

(2) 证明随机变量  $Y$  服从标准正态分布

$$\text{【答案】 (1) } F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(x), & x \leq y \\ \frac{1}{2}\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(y), & x > y \end{cases}$$

【解析】 (1)  $(X_1, Y)$  的分布函数为:

$$F(x, y) = P\{X_1 \leq x, Y \leq y\} = P\{X_3 = 0, X_1 \leq x, Y \leq y\} + P\{X_3 = 1, X_1 \leq x, Y \leq y\}$$

$$= P\{X_3 = 0, X_1 \leq x, X_2 \leq y\} + P\{X_3 = 1, X_1 \leq x, X_1 \leq y\}$$

$$= \frac{1}{2}P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y\}$$

$$\begin{aligned} \text{① } x \leq y \text{ 时, } F(x, y) &= \frac{1}{2}P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y\} \\ &= \frac{1}{2}\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } x > y \text{ 时, } F(x, y) &= \frac{1}{2}P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y\} \\ &= \frac{1}{2}\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(y) \end{aligned}$$

综上所述: 
$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(x), & x \leq y \\ \frac{1}{2}\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(y), & x > y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad F(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X_3 = 0, Y \leq y\} + P\{X_3 = 1, Y \leq y\} \\ &= P\{X_3 = 0, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leq y\} + P\{X_3 = 1, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leq y\} \\ &= P\{X_3 = 0, X_2 \leq y\} + P\{X_3 = 1, X_1 \leq y\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leq y\} = \phi(y) \end{aligned}$$

所以随机变量  $Y$  服从标准正态分布。

(23) (本题满分 11 分) 设某种元器件的使用寿命  $T$  的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\theta, m$  为参数且大于零。

(1) 求概率  $P\{T > t\}$  与  $P\{T > s + t | T > s\}$ , 其中  $s > 0, t > 0$ .

(2) 任取  $n$  个这种元件做寿命实验, 测得它们的寿命分别为  $t_1, \dots, t_n$ , 若  $m$  已知, 求  $\theta$  的最大似然估计值。

【答案】 (1) 
$$P\{T > t\} = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t \geq 0 \end{cases}, \quad P\{T > t + s | T > s\} = e^{-\frac{(t+s)^m - s^m}{\theta^m}}$$

(2) 
$$\hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$$

【解析】 (1) 
$$P\{T > t\} = 1 - P\{T \leq t\} = 1 - F(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} P\{T > t + s | T > s\} &= \frac{P\{T > t + s, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > t + s\}}{P\{T > s\}} \\ &= \frac{1 - P\{T \leq t + s\}}{1 - P\{T \leq s\}} = \frac{1 - F(t + s)}{1 - F(s)} = \frac{e^{-\frac{(t+s)^m}{\theta^m}}}{e^{-\frac{s^m}{\theta^m}}} = e^{-\frac{(t+s)^m - s^m}{\theta^m}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{t^{m-1} \cdot m}{\theta^m} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t > 0, \text{ 当寿命的观测值 } t_1, \dots, t_n \text{ 皆大于零时} \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \theta^{-nm} t^{n(m-1)} m^n e^{-\theta^{-m} \sum_{i=1}^n t_i^m},$$

$$\ln L = -n \ln \theta + n(m-1) \ln t + n \ln m - \theta^{-m} \sum_{i=1}^n t_i^m;$$

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = -\frac{nm}{\theta} + \frac{m \sum_{i=1}^n t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0, \hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$$

故  $\hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$  为所求的最大似然估计值。